

KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN  
TE AMSTERDAM

---

PROCEEDINGS

VOLUME XXXV

No. 5

President: J. VAN DER HOEVE

Secretary: B. BROUWER

---

CONTENTS

W. DE SITTER: "On the expanding universe", p. 596.

W. H. KEESEM et J. H. C. LISMAN: "La courbe de fusion de l'hydrogène jusqu' à 610 kg/cm<sup>2</sup>", p. 607.

F. M. JAEGER and J. E. ZANSTRA: "The Structure of Potassium-Osmiamate", p. 610.

J. J. VAN LAAR: "Die Gleichung der Schmelzkurve", p. 624.

HERMINE FOLMER: "Investigations about the ionising effect of  $\alpha$ -rays in solid dielectrics". (Communicated by Prof. H. HAGA), p. 636.

J. A. SCHOUTEN und D. VAN DANTZIG: "Zum Unifizierungsproblem der Physik. Skizze einer generellen Feldtheorie". (Communicated by Prof. P. EHRENFEST), p. 642.

C. S. MEIJER: "Asymptotische Entwicklungen von BESSELschen, HANKELSchen und verwandten Funktionen". I. (Communicated by Prof. J. G. VAN DER CORPUT), p. 656.

J. POPKEN: "Ueber eine trigonometrische Summe". (Communicated by Prof. J. G. VAN DER CORPUT), p. 668.

O. BOTTEMA: "Die linearen Komplexe in der nicht-Euklidischen Geometrie", II. (Communicated by Prof. W. VAN DER WOUDE), p. 681.

B. TH. TJABBES: "On the magnetic properties of some compounds of Molybdenum, Tungsten and Chromium, in various states of valency of these elements". (Communicated by Prof. F. M. JAEGER), p. 693. (With one Table).

A. SMITS und E. J. HARMSEN: "Über die Dampflinie der Dreiphasenstreife für die Koexistenz von den zwei festen Komponenten mit Dampf eines binären Systems". (Communicated by Prof. J. D. VAN DER WAALS Jr.), p. 700.

C. P. J. PENNING, M. A. v. HERWERDEN and TH. J. BOELE-NYLAND: "Bloodgroup investigation in the Over Veluwe (Harderwijk and surrounding districts)". (Communicated by Prof. J. BOEKE). (With one plate), p. 706.

**Astronomy.** — *On the expanding universe.* By W. DE SITTER.

(Communicated at the meeting of May 28, 1932.)

The non-static solutions of the field equations of the general theory of relativity for an isotropic and homogeneous universe, giving a line-element

$$ds^2 = -R^2 d\sigma^2 + c^2 dt^2, \quad d\sigma^2 = \gamma_{ij} d\xi_i d\xi_j \quad \dots \quad (1)$$

$R$  being a function of  $t$  alone, and  $d\sigma$  being a line-element of three-dimensional space<sup>1)</sup>, have been investigated by FRIEDMANN<sup>2)</sup> in 1922, and independently in 1927 by LEMAÎTRE<sup>3)</sup>, who worked out the astronomical consequences in great detail. These solutions have attracted much attention of late in connection with the observed recession of the spiral nebulae. The field-equations are in all these investigations supposed to contain the "cosmical constant"  $\lambda$ ; they are thus

$$G_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} G + \lambda g_{\mu\nu} + \varkappa T_{\mu\nu} = 0. \quad \dots \quad (2)$$

The material tensor, or energy tensor,  $T_{\mu\nu}$  is supposed to be given by

$$T_{ij} = -g_{ij} p = R^2 \gamma_{ij} p, \quad T_{i4} = T_{4i} = 0, \quad T_{44} = \varrho = \varrho_0 + 3p, \quad \dots \quad (3)$$

where  $\varrho_0$  is the "proper" or "invariant" density,  $\varrho$  the "relative" density, and  $p$  the "pressure", consisting of the average irregular motions of material particles, and the pressure of radiation. The proper mass of radiation is zero, as well is known. Both  $\varrho$  and  $p$  are supposed to be independent of the space co-ordinates. The assumption (3) then involves isotropic and homogeneous distribution of matter and radiation. We are thus abstracting from all complications introduced by the condensation of matter into stars and stellar systems. We can say that we are studying the field of pure inertia, neglecting gravitation. The tensor  $T_{\mu\nu}$  has been so constructed as to make its divergence zero in accordance with the laws of conservation of mass, energy and momentum. It is a consequence of these laws (i.e. of the vanishing of the divergence of  $T_{\mu\nu}$ ) and the independence of  $\varrho_0$  and  $p$  of the space co-ordinates, that  $g_{44}$  is also independent of the space co-ordinates, and can consequently be taken as equal to unity, as has been done in (1).

FRIEDMANN considers the solutions of (2) for different values of  $\lambda$ ,

<sup>1)</sup> The convention is made throughout this paper that roman indices take the values 1, 2, 3 only, whilst greek indices run from 1 to 4.

<sup>2)</sup> *Zeitschr. für Physik*, **10**, p. 377.

<sup>3)</sup> *Ann. Soc. Scientif. de Bruxelles*, Vol. **47**, A, p. 49, also *M.N.* xci, p. 483, 1931.

positive, negative or zero, LÉMAÎTRE considers only positive values of  $\lambda$ . From the mathematical point of view the presence of  $\lambda$  is required in the equation in order to give it the highest degree of generality,  $G_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}G$  and  $g_{\mu\nu}$  being the only tensors, containing differential quotients of the  $g_{\mu\nu}$  not higher than the second order, of which the divergence vanishes. The constants  $\lambda$  and  $\kappa$  thus have, from the mathematical point of view, entirely the same function, and there is no a priori restriction on their values, they might be positive, negative or zero. Comparison of the first approximation of the solution (for small velocities) with classical mechanics shows that  $\kappa$  is to be identified with the constant of gravitation :

$$\kappa = \frac{8\pi G}{c^2} = 1.860 \cdot 10^{-27} gr^{-1} cm.$$

The constant  $\kappa$  is thus essentially positive:  $\kappa = 0$  would mean that we were investigating pure space, without anything in it, i.e. that we were studying geometry and not physics. The constant  $\lambda$  on the other hand, has no counterpart in classical mechanics. It was introduced into the equations by EINSTEIN in 1917, not from considerations of mathematical generality or elegance, but in order to make possible a finite density of matter in a static universe.

This required a positive value of  $\lambda$ . At the same time three-dimensional space, having the line-element  $d\sigma$ , was found to be of constant positive curvature, and consequently finite, which was at the time considered to be a great advantage, since it avoided the necessity of boundary conditions at infinity. If the pressure is neglected, the curvature of three-dimensional space in the static universe becomes equal to  $\lambda$ . EDDINGTON<sup>1)</sup> accordingly in 1921 interpreted the meaning of  $\lambda$  as providing a natural standard of length. The idea of a positive  $\lambda$  and a positive curvature of three-dimensional space eventually became so much a part of the accepted theory that, when the static solution was replaced by the non-static ones, it was at first overlooked that in the non-static solutions the sign neither of  $\lambda$  nor of the curvature is prescribed, and both may be positive, negative or zero, independently of each other. Attention was first called to this fact by Dr. O. HECKMANN in July 1931<sup>2)</sup>.

From the equations (2) with the value (3) of the energy tensor it follows at once that the three-dimensional line-element  $d\sigma$  must be one of a space of *constant* curvature. This curvature, however, may be either positive, negative or zero. If it is not zero, its numerical value can be taken equal to unity without any loss of generality. Thus, if  $k$  be a quantity which can have the values  $+1, 0, -1$ , and if we denote by  $s$  the function

$$s(x) = \frac{\sin x}{x},$$

<sup>1)</sup> Cf. *The Mathematical Theory of Relativity*, §§ 65, 66.

<sup>2)</sup> *Göttinger Nachrichten*, July 1931, p. 127.

and therefore

$$\mathbf{s}(ix) = -\frac{\sinh x}{x},$$

we have

$$d\sigma^2 = d\varrho^2 + \varrho^2 \mathbf{s}^2(\varrho\sqrt{k})(d\psi^2 + \sin^2\psi \cdot d\theta^2). \quad (k = +1, 0, -1). \quad (4)$$

The equations (2) then give the further conditions, differential quotients  $d/dct$  being denoted by dots :

$$\left. \begin{aligned} 2\frac{\dot{R}}{R} + \frac{\dot{R}^2}{R^2} + \frac{k}{R^2} &= \lambda - \kappa p \\ \frac{\dot{R}^2}{R^2} + \frac{k}{R^2} &= \frac{1}{3}(\lambda + \kappa\varrho), \end{aligned} \right\} \quad (k = +1, 0, -1) \quad \dots \quad (5)$$

and the equation of energy becomes

$$\dot{\varrho} + 3\frac{\dot{R}}{R}(\varrho + p) = 0 \quad \dots \quad (6)$$

If we call  $\varepsilon$  the instantaneous curvature of three-dimensional space, thus :

$$\varepsilon = \frac{k}{R^2},$$

and if we denote the coefficient of expansion by  $h$ , thus :

$$h = \frac{\dot{R}}{R},$$

the equations (5) are equivalent to

$$\left. \begin{aligned} \lambda + \kappa\varrho &= 3(\varepsilon + h^2) \\ \kappa(\varrho + p) &= 2(\varepsilon - h) \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (7)$$

In the static case, with  $h = \dot{h} = 0$ , it is evident that, if  $\varrho$  and  $p$  are positive, both  $\lambda$  and  $\varepsilon$  must be positive, and if  $p = 0$  we have  $\lambda = \varepsilon = \frac{1}{2}\kappa\varrho$ , as in EINSTEIN's universe. But in the non-static case the equations (7) are insufficient to determine the values, or even the signs, of  $\lambda$  and  $\varepsilon$ , since  $h$  is entirely unknown.

In the actual universe the pressure density  $p$ , consisting of the radiation pressure and the irregular motions of stars and stellar systems, is very small as compared to the material density  $\varrho_0$ , the ratio  $p/\varrho_0$  being probably of the order of  $10^{-6}$ . We can therefore as a good approximation neglect the pressure, taking

$$p = 0, \quad \varrho = \varrho_0.$$

This will be done in the present paper, though the general conclusions remain the same if the pressure is not neglected. In this case, the equation of energy (6) gives at once

$$\kappa \varrho = \frac{3 R_1}{R^3},$$

$R_1$  being a (positive) constant of integration. Further we put

$$y = \frac{R}{R_1}, \quad \tau = \frac{ct}{R_1}, \quad \gamma = \frac{1}{3} R_1^2 \lambda.$$

The second equation (5) then becomes

$$\left( \frac{dy}{d\tau} \right)^2 = \frac{1}{y} - k + \gamma y^2, \quad \dots \dots \dots \quad (8)$$

the first giving simply the derivative of this, viz.:

$$\frac{d^2y}{d\tau^2} = -\frac{1}{2y^2} + \gamma y \quad \dots \dots \dots \quad (9)$$

By introducing  $y$  and  $\tau$  instead of  $R$  and  $ct$  we have, of course, excluded from consideration the case  $R_1 = 0$ , or  $\varrho = 0$ , corresponding for  $\lambda > 0$ ,  $k = +1$  to the well known "solution B" or "empty universe", and giving similar solutions for other values of  $\lambda$  and  $k$ . But these are only limiting cases, none of which does occur in nature, and they are of mathematical interest only.

We put

$$P = 1 - ky + \gamma y^3 = \frac{3h^2}{\kappa \varrho}.$$

Then (8) can be written

$$\left( \frac{dy}{d\tau} \right)^2 = \frac{P}{y}, \quad \dots \dots \dots \quad (8')$$

and consequently real solutions are only possible for positive values of  $P$ , since  $y$  by its nature is necessarily positive. In Fig. 1, in which the co-ordinates are  $y$  and  $\gamma$ , the full drawn lines represent the curves  $P = 0$  for the three cases  $k = +1$  (spherical or elliptical space),  $k = 0$  (euclidean space) and  $k = -1$  (hyperbolical space).  $P$  is positive above these curves and negative below them, the real solutions thus correspond to the part of the semi-plane above the curves. It is seen by inspection of the diagram that there are three possible types of solution, which may be called the oscillating universes, and the expanding universes of the first and of the second kind.

In the oscillating solutions the value of  $y$  oscillates between zero and  $\infty$

maximum value  $y_1$ . In the expanding solutions of the first kind the value of  $y$  increases from zero to infinity, and in those of the second kind it

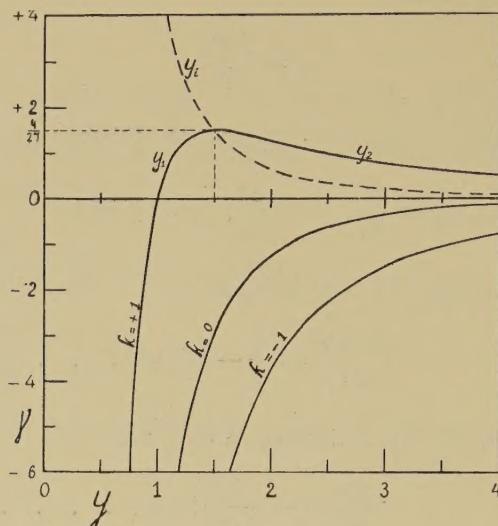


Fig. 1

increases from a certain minimum value  $y_2$  to infinity. It is clear from the diagram that the occurrence of the different kinds of solutions is as given in the following little table.

$\lambda$	Curvature		
	$k = +1$	$k = 0$	$k = -1$
positive	Osc. Exp. I Exp. II	Exp. I	Exp. I
zero	Osc.	Exp. I	Exp. I
negative	Osc.	Osc.	Osc.

Only for a positive  $\lambda$  and a spherical (or rather "elliptical") three-dimensional space all three kinds of solutions are possible; for all other combinations of the signs of  $\lambda$  and  $k$  we have either only oscillating universes, or only expanding universes of the first kind.

The general type of the variation of  $y$  with  $t$  in the different cases is represented in Fig. 2. For  $y=0$  we have  $P=1$ , therefore  $dy/dt=\infty$ : all solutions leave the axis of  $t$  perpendicularly: the expansion in the case of the oscillating universes and the expanding universes of the first kind starts by an explosion. Of course for very large densities, i.e. for very small values of  $y$ , the simplifications made in deriving the equations are no longer

allowable. The actual value  $y=0$  is impossible in nature, and presumably in the actual universe, if it is of one of these two types, there will be a minimum value of  $y$  somewhat as shown by the dotted lines in Fig. 2. In

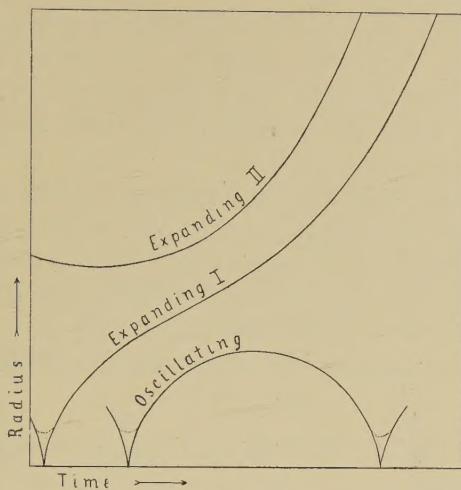


Fig. 2

the expanding solution of the second kind there is a minimum value  $y_2$ . These solutions are only possible for the limited range of  $\lambda$  given by  $0 < \gamma < 4/27$ . For the limiting value  $\gamma = 4/27$  we have either the limiting member of the family of expanding universes of the second kind, viz.: LEMAÎTRE's universe, in which  $y$  varies from  $y_2 = 1.5$  to infinity, the minimum radius being that of the static universe or "EINSTEIN's universe", and corresponding to  $t = -\infty$ , or the limiting member of the family of oscillating universes, having the same value  $y_1 = 1.5$  as a maximum, which is only reached at the time  $t = +\infty$ . The expanding solutions of the first kind have a point of inflexion, which according to (9) occurs for the value

$$y_i = (2\gamma)^{-1/3}. \dots \dots \dots \quad (10)$$

This curve is represented by the broken line in Fig. 1. In the case  $\lambda = 0$  there is no point of inflexion. The curve giving  $y$  as a function of  $\tau$  in the case  $k = -1$  (hyperbolical space) is of hyperbolical character (without an asymptote, however), the limiting value of  $dy/d\tau$  for  $y = \infty$  being unity. In the case  $k = 0$  (euclidean space) it is of parabolical character, the limiting value of  $dy/d\tau$  being zero. In the case  $k = +1$  (elliptical space) we have an oscillating universe. The solutions for  $\lambda = 0$  are best expressed by means of an auxiliary variable  $\psi$ , thus:

$$\begin{aligned} \lambda = 0, k = +1 : \tau &= \psi - \frac{1}{2} \sin 2\psi, \quad y = \sin^2 \psi, \\ k = 0 : \tau &= \frac{2}{3} \psi^3, \quad y = \psi^2, \\ k = -1 : \tau &= \frac{1}{2} \sinh 2\psi - \psi, \quad y = \sinh^2 \psi. \end{aligned} \quad \left. \right\} \quad (11)$$

The different solutions for  $k = +1$  have been given in considerable detail by the present writer in *B.A.N.* 223, using the same approximation as in the present paper, viz.:  $p = 0$ , i.e. assuming the universe to contain only matter at rest, and no radiation. Dr. HECKMANN<sup>1)</sup> has discussed the solutions for all values of  $\lambda$  and  $k$  for the case  $\varrho_0 = 0$ , i.e. for a universe without matter, but filled with radiation. The general character of the solutions, however, depends very little on the contents of the universe; it is practically the same in the two extreme cases considered by Dr. HECKMANN and myself.

There are no astronomical data of observation, which enable us to make a decision regarding the value of  $\lambda$ , or the sign of the curvature. The only data that can be derived from astronomical observations are the rate of expansion  $h$ , i.e. the ratio of the radial velocity and the distance of the spiral nebulae ( $h = v/cr = R/R$ ), and the density  $\varrho$ . It is convenient to express all data by quantities of the dimension of a length, thus:

$$h = \frac{1}{R_B}, \quad \pi\varrho = \frac{2}{R_A^2}, \quad \lambda = \frac{3}{R_C^2}, \quad \gamma = \frac{R_1^2}{R_C^2}.$$

We can adopt as the most probable value of the coefficient of expansion:  

$$h = 500 \text{ km/sec per } 10^6 \text{ parsecs.}$$

The determination of  $h$  depends on the measured redshifts in the spectra of nebulae, and on the scale of distances for these same nebulae. The first does not introduce a larger uncertainty than about 10 %. The second, however, is still very uncertain. There are only two or three of the larger and nearer spirals, in which cepheids or novae have been discovered. The adopted distances of a few others depend on the measured brightness and assumed absolute magnitude of the so called brightest stars in them. Even if it were certain that these objects are actually stars, their assumed absolute magnitude is still extremely uncertain. Of the great majority of the nebulae the distances are derived from the total magnitudes. On the one hand the determination of the scale of apparent magnitudes is as yet not very accurate, on the other hand the adopted absolute magnitude of an average spiral, which is based on those of the few of which the distances have been determined from cepheids, novae or "brightest stars", is also subject to considerable uncertainty. Taking all this into consideration I think the uncertainty of  $h$  is not overestimated if we take it to correspond to a factor of 2 both ways, and thus adopt for the limits of  $R_B$ :

$$10^{27} < R_B < 4 \cdot 10^{27} \dots \dots \dots \quad (12)$$

The density is still much more uncertain. HUBBLE<sup>2)</sup> adopted in 1926 as a lower limit  $1.5 \times 10^{-31}$ . To be quite safe, we shall take as the lower

<sup>1)</sup> *Göttinger Nachrichten*, Febr. 1932, p. 181.

<sup>2)</sup> *Mt. Wilson Contrib.* 324.

limit  $10^{-31}$ . An upper limit is given by assuming the whole of intergalactic space to be filled with gas and computing the maximum density this could have without giving rise to greater absorption than is reconcilable with astronomical data. Dr. MENZEL<sup>1)</sup> in this way arrived at an upper limit of  $10^{-26}$ , corresponding to one atom of hydrogen per  $100 \text{ cm}^3$ . To these limits corresponds :

$$3.10^{26} < R_A < 10^{29} \dots \dots \dots \quad (13)$$

From (12) and (13) we find for the limits of the value of  $P = 3h^2/\kappa\varrho = 3R_A^2/2R_B^2$  at the present stage in the evolution of the universe :

$$0.01 < P < 15000 \dots \dots \dots \quad (14)$$

If we adopted the limits sometimes given for  $\varrho$ , viz.:  $10^{-28} > \varrho > 10^{-30}$ , and took no account of the uncertainty of  $h$ , the possible range of  $P$  would become more restricted, viz.:

$$4 < P < 400, \dots \dots \dots \quad (14^*)$$

but I think that (14) represents the uncertainty of our present knowledge better than (14\*). Even if the value of  $P$  were known accurately, the values of  $\gamma$  and  $k$  would still be indetermined, though the choice would be limited. Thus, if we could be sure that  $P$  exceeded unity, all oscillating families would be excluded, with the exception of those for  $\gamma < 0$ ,  $k = -1$ , for which  $P$  reaches a maximum amounting to  $P_{\max} = 1 + (-6.75\gamma)^{-\frac{1}{2}}$  for the value  $y = (-3\gamma)^{-\frac{1}{2}}$ . On the other hand if  $P$  were smaller than 1 all the expanding universes of the first kind would be excluded, excepting those for  $\gamma > 4/27$ ,  $k = +1$ , for which  $P$  reaches a minimum of  $P_{\min} = 1 - (6.75\gamma)^{-\frac{1}{2}}$  for the value  $y = (3\gamma)^{-\frac{1}{2}}$ . The expanding universe of the second kind, which is only possible for  $k = +1$ ,  $0 < \gamma \leq 4/27$ , assumes during its course of evolution all values of  $P$  from zero to infinity. If we wish with EINSTEIN, to remove the term with  $\lambda$  from the field equations, we have the choice between the three solutions (11), and we will have to take  $k = +1$ ,  $0$ ,  $-1$  for  $P < 1$ ,  $P = 1$ ,  $P > 1$  respectively. With a view to the great uncertainty of  $P$ , these and similar statements are, however, of little practical interest.

In the present state of our knowledge it is very well possible to assume that both  $\lambda$  and  $k$  are equal to zero.

It would be different if the value of  $\lambda$ , or the value of the curvature  $\epsilon = k/R^2$ , were known from some other source. Sir ARTHUR EDDINGTON has recently published<sup>2)</sup> the formula

$$\frac{\sqrt{N}}{R} = \frac{mc^2}{e^2}, \dots \dots \dots \quad (15)$$

$m$  being the mass, and  $e$  the charge of an electron.  $N$  is the number of

<sup>1)</sup> Privately communicated.

<sup>2)</sup> *Proc. Royal Society, A.* Vol. 133, p. 605 (August 1931).

protons in the universe, and consequently only has a meaning for a closed universe, with a finite mass, i.e. in the case  $k = +1$ . EDDINGTON further satisfies himself that for  $R$  the value denoted above by  $R_C$  must be taken, by reasonings based on the assumption that the actual universe is LEMAÎTRE's one, the limiting case of the expanding series of the second kind,  $\gamma = 4/27$ ,  $k = +1$ . If this, or a similar, formula could be proved to hold independent of *a priori* assumptions about  $\lambda$  and the curvature, this would give an independent determination of either  $\lambda$  or  $\varepsilon$ , and we would be able to determine the other, as well as  $h$ , from (7) as soon as the determination of  $\varrho$  (and  $p$ ) and  $h$  from astronomical observations would be sufficiently accurate, and thus the whole problem of the grand scale model of the universe would be solved. An important remark should, however, be made. The whole theory of relativity, including the equations for the expanding universe, is a pure abstraction or generalisation from observations, after NEWTON's own heart, without any hypotheses. But (15) is based on considerations belonging to the quantum theory and wave mechanics, and introduces the hypothesis. Also in my opinion the "universe" itself is an hypothesis. Our observations cover only a very limited part of space and time, which I have been in the habit of calling "our neighbourhood". The "universe" is an hypothetical concept, arrived at by extrapolation beyond this neighbourhood involving the applicability of the values (3) of the energy tensor to all space and time. A complete theory of the universe is not possible without hypotheses. Consequently, as has been explained by DINGLE in his recent book<sup>1)</sup> we must be prepared in the theory of the universe to meet with paradoxical results. The universe, like the atom, may do things that would be impossible for a finite mechanical system.

A well known paradox, which however I think is only apparent, connected with the theory of the expanding universe is the shortness of the time scale. The differential coefficient  $dy/d\tau$ , or  $dR/cdt$ , being finite, it is evident that the time  $\tau - \tau_0$  elapsed since the minimum of  $y$ , the time required for  $y$  to double its value, and similar intervals of time, must be roughly of the same order<sup>2)</sup> as  $y$  itself.

The order of magnitude is given by the observed value of  $h^{-1} = R_B$ , which is  $2.10^9$  lightyears. The interval  $t - t_0$  elapsed since the beginning of the expansion is thus of the order of a few thousand million years. Now a thousand million lightyears is a very large distance indeed, but a thousand million years is a short time. The interval  $t - t_0$  is of the order of the age of the earth. Astronomers have been in the habit lately, and I think on good grounds, of reckoning the ages of the stars, and of stellar systems such as double and multiple stars, or star clusters, in periods which are at least a thousand times longer. The paradox arises from the identification of the beginning of the expansion with the beginning of this

<sup>1)</sup> Science and Human Experience, 1931.

<sup>2)</sup> Two quantities may still be considered to be of the same order of magnitude if they differ by a factor of 10, but not of 1000.

evolution. This identification, however, is entirely gratuitous. We will have to accustom ourselves to the idea that the evolution of the stars and stellar systems on the one hand, and the expansion of the universe on the other hand, are two processes going on side by side, but independent of each other, apart from possible interaction at critical epochs, e.g. when  $y$  is so small that the simplified equations of the expanding universe are no longer applicable.

The line-element is

$$ds^2 = -R^2 d\sigma^2 + c^2 dt^2, \quad d\sigma^2 = \gamma_{ij} d\xi_i \cdot d\xi_j \quad \dots \quad (1)$$

The space co-ordinates in natural measure are, however, not  $\xi_i$ , but

$$x_i = R \cdot \xi_i.$$

An observer, in interpreting his observations, refers them to a system of co-ordinates which is galilean for his particular position in space and time. He will naturally choose this point for his origin of co-ordinates, and count his spatial radius vector and his time from there. A transformation to galilean co-ordinates is always possible, but the differentials  $dr$  and  $du$  of the galilean radius vector and time will as a rule not be total differentials. Since we wish to investigate not only the immediate neighbourhood of the observer, but the whole universe, we must introduce new variables  $r$  and  $u$  so chosen that  $dr$  and  $du$  will be total differentials, co-inciding with the galilean  $dr$  and  $du$  for  $r=0, u=0$ . It is convenient to make the transformation in two steps, first transforming the radius vector alone by putting

$$r = R \cdot \varrho, \quad R d\varrho = dr - h r \cdot c dt.$$

This transforms the line-element to

$$ds^2 = -dr^2 - br^2 (d\psi^2 + \sin^2 \psi d\theta^2) + 2h r \cdot dr \cdot c dt + (1 - h^2 r^2) c^2 dt^2, \quad (1^*)$$

showing its essential non-static character. The term with  $dr c dt$  can always be removed by introducing a new time  $u$  making the line-element :

$$ds^2 = -a dr^2 + br^2 (d\psi^2 + \sin^2 \psi d\theta^2) + f \cdot du^2, \quad \dots \quad (1^{**})$$

where  $a, b$  and  $f$  now are functions of both  $r$  and  $u$ . The variable  $u$  can always be so chosen that  $a$  and  $f$  become equal to unity for  $r=0, u=0$ . The factor  $b$  in  $(1^*)$  and  $(1^{**})$  is not essential, it only serves to take care of the (eventual) curvature of three-dimensional space, and becomes unity for  $r=0$ . It depends on  $y$ , which is now also a function of both  $r$  and  $u$ , changing not only with the time  $u$ , but also with the radius vector  $r$ . This second transformation from  $(1^*)$  to  $(1^{**})$  is, however, not essential, since  $(1^*)$  already is galilean for  $r=0$ .

We have now to consider the motion of material particles, or galactic systems, i.e. the geodesics in the space-time  $(1^*)$ . In the case of the line-element  $(1)$  the track of the particle is a geodesic in the three-dimensional

space  $(\varrho, \psi, \theta)$ , but this track is *not* described with constant velocity. The velocity and its radial component are<sup>1)</sup>:

$$\left(\frac{d\sigma}{c dt}\right)^2 = \frac{\varphi_0^2}{R^4 + R^2 \varphi_0^2}, \quad \left(\frac{d\varrho}{c dt}\right)^2 = \frac{\varphi_0^2 - \Gamma_0^2/\varrho^2}{R^4 + R^2 \varphi_0^2} \dots \dots \quad (16)$$

where  $\varphi_0$  and  $\Gamma_0$  are constants. A special case is, of course,  $\varphi_0 = 0, \Gamma_0 = 0$ , the particle being at rest in the space  $(\varrho, \psi, \theta)$ . The actual values of  $\varphi_0$  and  $\Gamma_0$  of course are not exactly zero, but they are presumably small and different for each individual spiral.

In the case  $(1^*)$  the track of the particle in the three-dimensional space  $(r, \psi, \theta)$  is a curve of hyperbolic character, approaching the origin to a certain minimum distance, which is reached at a time  $t$  differing from the time  $t_0$  corresponding to the minimum of  $R$  by a quantity of the order of  $\varphi_0$  and  $\Gamma_0$ . The radial component of the velocity in this curve is

$$\frac{dr}{c dt} = \sqrt{\frac{\varphi_0^2 - R^2 \Gamma_0^2/r^2}{R^2 + \varphi_0^2}} + rh, \dots \dots \quad (16^*)$$

and consequently for large distances  $r$ , and not too small values of  $R$ , is practically proportional to the distance, as observed. All the spirals have thus passed very near to the origin of co-ordinates, and consequently to each other, at a time which is a few thousand million years ago. If we assume the actual universe to be one of the expanding family of the second kind, their minimum distances were probably still considerably larger than their diameters, if it is of the oscillating type or of the expanding type of the first kind, the minimum distances were probably much smaller, and they may have partly penetrated each other. It should be remarked that the size of the galaxies themselves is not influenced by the change of  $R^2$ ), at least not so long as the equations for the expanding universe remain applicable.

This near approach was, however, not the "beginning of the world". The galactic systems and the stars existed before that time. Still it is to be expected that it has not been entirely without influence on their development. I think the effects of this influence can still be traced.

The spirals and our own galactic system are all rotating, with periods of the order of a few hundred million years. They are all very inhomogeneous in structure, consisting of condensations, or star clouds, separated by regions of smaller density. If the rotation had been going on undisturbed for a great many revolutions, this inhomogeneity could not subsist. But if only a small number of revolutions (of the order of ten) has been completed since a strong perturbation occurred, the inhomogeneity is of comparatively recent date, and has not yet had time to be smoothed out. Also the spiral structure itself is most readily explained as an effect of tidal forces resulting from a near approach. If, however, we compute the frequency of near approaches of spiral nebulae on the basis of their average peculiar random

<sup>1)</sup> Cf. B. A. N. 193, p. 217.

<sup>2)</sup> Cf. B. A. N. 223, p. 146.

motions, and average distances apart at the present time, taking no account of the change of size of the universe, we find that they should be very rare, the time between encounters being more nearly of the order of  $10^{12}$  years, instead of  $10^9$  or  $10^{10}$ .

Also it is a significant co-incidence that the minimum value of  $R$  occurred about at the date of the birth of the planetary system. Modern theories ascribe the origin of the planets to a near approach, or even a collision, of the sun and another star. Evidently the chances that such a collision should occur were very much larger at the epoch of minimum size of the universe than they are now.

The time used in our theories of the evolution of stars, of the planetary system and of double stars and stellar systems, is, of course, the time  $u$  of the line-element (1\*\*) co-inciding with the galilean co-ordinates here and now. It is easy to choose this time so as to relegate the epoch of the minimum of  $y$  to the infinite past, where it is already in LEMAÎTRE's universe for the time  $t$  of the line-element (1). Of course the infinity is only logarithmic, and it does not make the time during which anything really happens any longer. This introduction of another time is only a mathematical trick, providing no solution for the paradox of the time scale. But the fact that it is possible in all cases is another illustration of the fact that our present knowledge does not contain the necessary data to choose between the different families of expanding universes.

---

**Physics.** — *La courbe de fusion de l'hydrogène jusqu'à 610 kg/cm<sup>2</sup>.* Par MM. W. H. KEESEM et J. H. C. LISMAN. (Communication N°. 221a from the KAMERLINGH ONNES Laboratory at Leiden.)

(Communicated at the meeting of May 28, 1932.)

§ 1. *Introduction.* Les déterminations de la courbe de fusion de l'hydrogène, déjà faites dans ce laboratoire jusqu'à une pression de 450 kg/cm<sup>2</sup> et jusqu'à une température de 24.67° K.<sup>1)</sup>, ont été continuées jusqu'à 610 kg/cm<sup>2</sup> et jusqu'à 27.65° K., celle-ci étant la température maximale réalisable avec le cryostat employé<sup>2)</sup>.

§ 2. *Méthode et appareils.* La méthode est la même que celle décrite dans la Comm. N°. 184a<sup>3)</sup>). Avant le commencement des observations le thermomètre à résistance Pt-64 était tombé hors de service par suite d'un dérangement; il fallut donc mesurer les températures à l'aide de Pt-24'; les températures mesurées correspondent d'une manière très satisfaisante

<sup>1)</sup> W. H. KEESEM and J. H. C. LISMAN, These Proceedings, 34, 598, 1931. Comm. Leiden N°. 213e.

<sup>2)</sup> W. H. KEESEM and J. H. C. LISMAN, These Proceedings 34, 602, 1931. Comm. Leiden N°. 213f.

<sup>3)</sup> H. KAMERLINGH ONNES and W. VAN GULIK, These Proceedings 29, 1184, 1926. Comm. Leiden N°. 184a.

à celles déduites de la courbe de tension de vapeur de l'hydrogène<sup>1</sup>). Le manomètre a été comparé avec la balance à pression.

§ 3. Les résultats des mesures sont résumés dans le tableau I et représentés par la fig. 1.

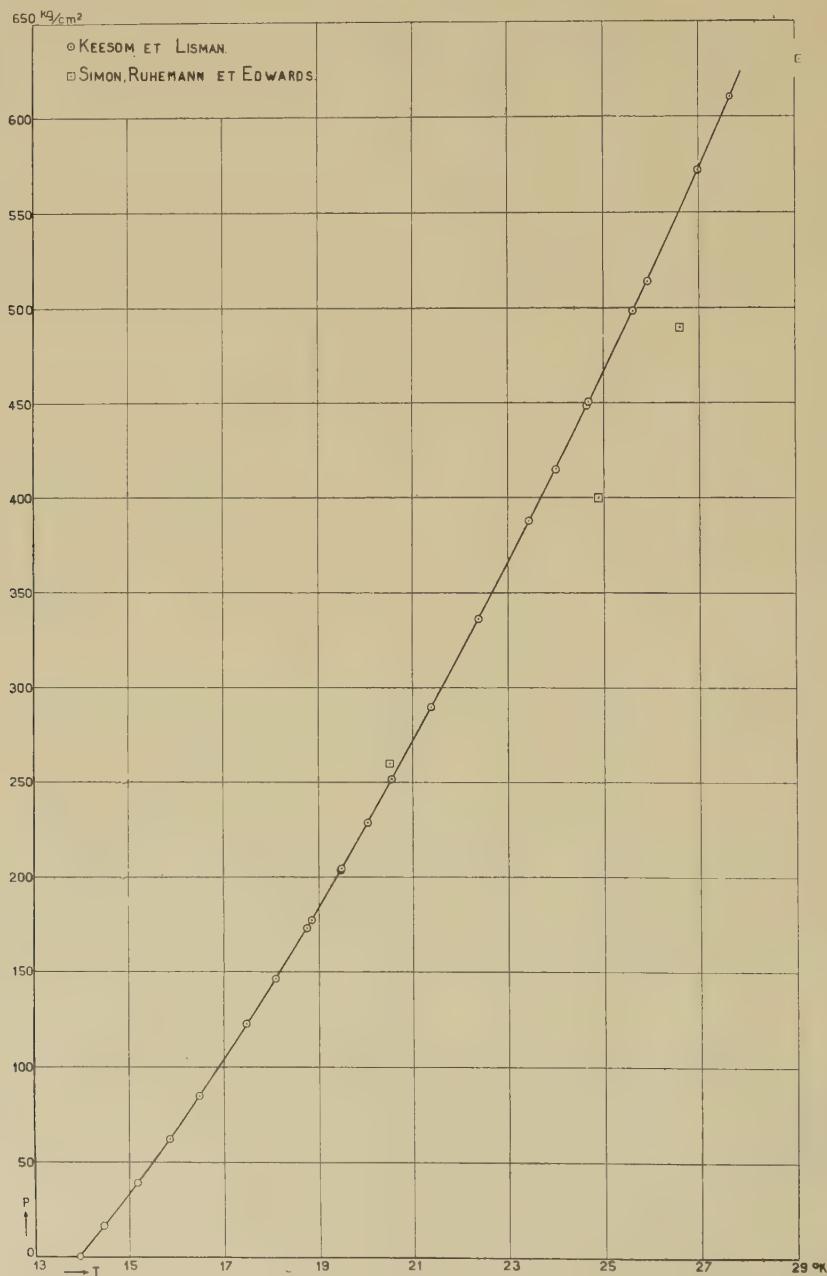


Fig. 1.

<sup>1)</sup> P. G. CATH and H. KAMERLINGH ONNES, These Proceedings **20**, 1155, 1928. Comm. Leiden N°. 152a.

TABLEAU I<sup>1)</sup>

Points de fusion de l'hydrogène			
<i>T</i> °K.	<i>p</i> kg/cm <sup>2</sup>	<i>T</i> °K.	<i>p</i> kg/cm <sup>2</sup>
13.95 <sup>2)</sup>	0.1	20.54	251.7
14.47	16.5	21.38 <sup>5</sup>	289.9
15.18	38.9	22.38	336.2
15.85	62.1	23.43	387.6
16.48	84.7	24.01	414.9
17.47	122.8	24.66 <sup>5</sup>	449.4
18.10	146.2	24.69	451
18.75	172.9	25.62	498 <sup>5</sup>
18.87	177.1	25.94	513 <sup>5</sup>
19.47	203.8	26.99	572
19.48	204.5	27.65	610 <sup>5</sup>
20.03	228.8		

Les points de MM. SIMON, RUHEMANN et EDWARDS<sup>3)</sup>, dessinés dans notre figure, ne sont pas situés sur notre courbe; il ne nous paraît pas improbable que ces différences doivent être attribuées au fait que la précision relative des mesures de M. SIMON et ses collaborateurs était moins grande à ces pressions-ci qu'à leurs plus hautes pressions.

Nous avons déduit de nos mesures le tableau II pour les valeurs entières de la température.

§4. *Discussion.* Nous avons essayé de représenter la courbe de fusion par la formule de SIMON et GLATZEL<sup>4)</sup>

$$\log_{10} (a + p) = c \log_{10} T + b.$$

A l'aide de la méthode des moindres carrés nous avons trouvé:

$$a = 245.3, \quad b = 0.28771, \quad c = 1.83435.$$

Les différences entre les pressions calculées et observées étaient systématiques; si l'on veut employer cette formule, cela ne peut donc se faire

<sup>1)</sup> Pour rendre le tableau complet nous y avons inséré les dates du tableau II de la Comm. N°. 213e.

<sup>2)</sup> Point triple: H. KAMERLINGH ONNES and W. H. KEESEOM, These Proceedings 16, 440, 1913. Comm. Leiden N°. 137d.

<sup>3)</sup> F. SIMON, M. RUHEMANN und W. A. M. EDWARDS, Zs. f. physik. Chem. B. 6, 331, 1930.

<sup>4)</sup> F. SIMON und G. GLATZEL, Zs. f. anorg. u. allg. Chemie 178, 309, 1929.

TABLEAU II.

Courbe de fusion de l'hydrogène.					
<i>T</i> °K.	<i>p</i> kg/cm <sup>2</sup>	<i>p</i> at	<i>T</i> °K.	<i>p</i> kg/cm <sup>2</sup>	<i>p</i> at
14	1.7	1.6	21	272.4	263.8
15	33.2	32.2	22	318.6	308.5
16	67.3	65.2	23	366.1	354.5
17	103.6	100.3	24	414.5	401.4
18	142.2	137.7	25	464.2	449.6
19	183.1	177.3	26	518	502
20	227.6	220.4	27	572	554

qu'en combinaison avec une courbe donnant ces différences en fonction de la température. C'est de cette manière que nous avons déduit le tableau II. D'autres formules, proposées par TAMMANN<sup>1)</sup>, par JÄNECKE<sup>2)</sup> et de nouveau par SIMON et GLATZEL, ne représentent pas nos mesures d'une manière plus satisfaisante.

Nous tenons à adresser nos vifs remerciements à M. C. J. MATTHIJS, nat. phil. cand., de son assistance pendant les observations et à M. L. NEUTEBOOM, technicien 1<sup>re</sup> classe au laboratoire cryogène, de son aide pendant les expériences.

<sup>1)</sup> G. TAMMANN, Kristallisieren und Schmelzen, 1903, p. 90.

<sup>2)</sup> E. JÄNECKE, Zs. f. physik. Chem. A. 156, 161, 1931.

**Chemistry.** — *The Structure of Potassium-Osmiamate.* By F. M. JAEGER and J. E. ZANSTRA.

(Communicated at the meeting of May 28, 1932.)

§ 1. In this paper the results of the spectrographical study of potassium-osmiamate:  $KOsNO_3$  will be communicated and the structure of this salt in the crystalline state, as deduced from them, will finally be discussed.

The compound was obtained in the way indicated in 1847 by its discoverers FRITZSCHE and STRUVE<sup>1)</sup> by treating a solution of  $OsO_4$  in potassiumhydroxide at 40° C. with strong ammonia. Its real chemical structure remained, for a long time, unsettled, until in 1901 WERNER and DINKLAGE<sup>2)</sup> proved that it is no nitroso-compound, but a derivative of

<sup>1)</sup> J. FRITZSCHE and H. STRUVE, Journ. de Pharm. et Chim. (3) 12, (1847), 304; A. JOLY, Compt. rend. Paris, 112, (1891), 1442; L. BRIZARA, Ann. de Chim. et Phys., (7), 21, (1899), 369; Bull. Soc. Chim. Paris, (3), 21, (1899), 170.

<sup>2)</sup> A. WERNER and K. DINKLAGE, Ber. d. d. chem. Ges., 34, (1901), 2698.

octavalent osmium, to which they ascribed the formula:  $\left\{ \begin{array}{c} \text{O} \\ \parallel \\ \text{O} = \text{Os} = \text{NK} \\ \parallel \\ \text{O} \end{array} \right\}$

of the tautomeric form:  $\left\{ \begin{array}{c} \text{O} \\ \parallel \\ \text{O} = \text{Os} - \text{OK} \\ \parallel \\ \text{N} \end{array} \right\}$ . As we shall see, neither of

these formulae is the correct one for this substance in the solid state, as the

spectrographical data prove, that here we have to deal with a complex salt entirely built up by ions, all of them having the electronic configuration of inert gases.

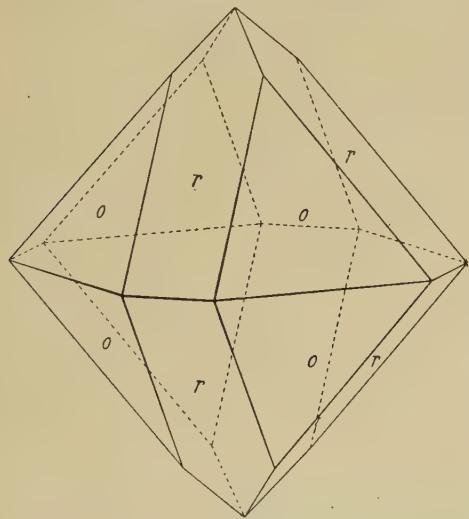


Fig. 1. Potassium-Osmiamate.

formation of a finely divided black precipitate of osmium or  $\text{OsO}_2$ .

The crystals are, as we shall soon see, *tetragonal-bipyramidal*, with an axial ratio:  $a:c = 1:2.3123$ ; the symmetry is, however, only very slightly different from a *ditetragonal-bipyramidal* one and this deviation is in no case manifested by the external form of the crystals.

*Forms observed:*  $r = \{101\}$ , predominant, lustrous;  $o = \{112\}$ , in most cases narrower and less developed than  $r$ , but yielding good reflections. The habitus is either bipyramidal or flattened parallel to two opposite faces or  $r$ .

Angular values	Observed	Calculated (from the spectr. data)
$o:r = (112):(011) = 40^\circ 27'$		$40^\circ 28'$
$o:o = (112):(1\bar{1}2) = 62^\circ 48'$		$62^\circ 54'$
$o:o = (112):(1\bar{1}2) = 74^\circ 11'$		$74^\circ 12'$
$r:r = (101):(10\bar{1}) = 46^\circ 50'$		$46^\circ 46\frac{1}{2}'$

No distinct cleavability was observed.

The measurements are practically identical with those published in 1891

by DUFET<sup>1</sup>); in his publication the crystals are, however, turned round the *c*-axis through 45°, so that the axial ratio, calculated from our angular values, becomes:  $a' : c' = 1 : 1.6350$  in that case. It is, however, advisable, as we shall soon see, to adopt the choice of the indices, as here suggested in the crystallographical measurements.

In convergent polarized light a crystal plate cut parallel to {001} showed the normal axial image of a uniaxial crystal of positive character and without circular polarisation. The specific gravity of the crystals at 18° C. was found to be: 4.49—4.51.

Corrosion-figures were obtained by means of a mixture of water and alcohol: on the faces (112) and (112) they had the shape of apparently isosceles triangles situated in such a way, that the presence of a plane of symmetry perpendicular to the tetrad axis was confirmed. If the triangles are really isosceles ones, also the presence of vertical planes of symmetry would be indicated by this fact. As we shall soon see, this is, however, *not* true; but it is worth while already here to draw attention to the fact, that the absence of the vertical symmetry-planes is neither revealed by the limiting faces of the crystals, nor by the corrosion-figures mentioned above.

By the resonance-method of GIEBE and SCHEIBE<sup>2</sup>) the absence of a symmetry-centre could *not* be proved. All these facts indicate, that either a ditetragonal-bipyramidal, or a tetragonal-bipyramidal symmetry is present in this case.

A LAUE-pattern on {001}, obtained with *tungsten*-radiation (44000 Volts) passing a small crystal in the direction of the *c*-axis, at first sight seemed to possess a tetrad axis and 2 + 2 symmetry-planes passing through this axis. On closer examination, however, it appeared that the spots of the inner circle, corresponding with {321} ( $\lambda = 0.371 \text{ \AA}$ ) showed differences in intensity, which were quite analogous to those observed in the cases of *wulfenite*, *potassiumperiodate*, etc., excluding therefore the presence of vertical planes of symmetry and proving the existence of only a tetrad axis (Fig. 2). The crystals are, therefore, hemihedral; their symmetry is that of the *tetragonal-bipyramidal* class  $C_{4H}$ . In Fig. 2<sup>B</sup> the corresponding LAUE-pattern on {110} is reproduced, showing two perpendicular symmetry-planes.

The deviation from the symmetry  $D_{4H}$  evidently is, also in this case, only very small.

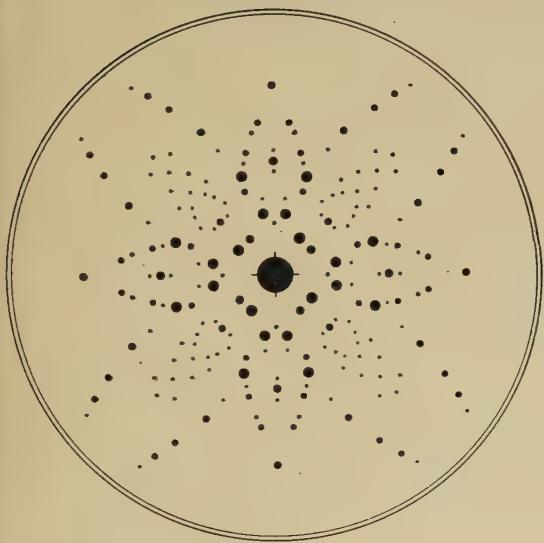
### § 3. *Rotation- and Oscillation-Spectrograms.*

A rotation-spectrogram by means of *copper*-radiation, with the *c*-axis as axis of rotation, showed a principal and six accessory spectra, the spots of the

<sup>1</sup>) H. DUFET, Bull. Soc. minéral. franc., **14** (1891), 214: vid. also: NORDENSKJÖLD, Journ. f. prakt. Chem., **41**, (1847), 104. The axial ratio found by DUFET is:  $a' : c' = 1 : 1.6319$ .

<sup>2</sup>) E. GIEBE and A. SCHEIBE, Zeits. f. Phys. **33**, (1925), 760; A. HETTICH and A. SCHLEEDE, ibid., **46**, (1928), 147.

even spectra being considerably more intensive than those of the odd ones. The 6<sup>th</sup> spectrum was, moreover, stronger than the 4<sup>th</sup>, this last more intensive



Laue-Pattern on {001}  
of Potassium-Osmiamate.

Fig. 2A



Laue-Pattern on {110}  
of Potassium-Osmiamate

Fig. 2B

than the 2<sup>nd</sup>; etc. From the distances of the subsequent spectra, the value  $I_c$  in the direction of *c*-axis could be determined to be: 12.95 Å.U. A BRAGG-spectrogram on the face (001), — calcite being used as a standard of comparison; — gave a fourth order image, yielding  $d_{(001)} = 3.27$  Å.; from this follows the correct value of  $I_c = 13.08$  Å. Although the time of exposure was much increased (8 m. Amp. hours; *Cu-a*-radiation), no other spectrum than (004) could ever be obtained.

In the same way a rotation-spectrogram was prepared round [110]; a principal and four accessory spectra were here observed, of which the even ones also showed more intensive spots than the odd ones. From this the distance  $I_{(110)}$  is calculated to be: 7.99 Å.U. An oscillation-spectrogram on (110), — calcite again serving as a standard, — gave  $d_{(110)} = 4.00$  Å.U.; no other spectral line than this second order image could be observed, so that the true value of  $I_{(110)}$  must be: 8.00 Å.

A rotation-spectrogram obtained by rotating the crystal round [100], however, showed a principal and three accessory spectra; the third spectrum consisted only of  $Cu_{\beta}$ -images. In the direction of the axis of rotation,  $I_a$  appeared to be: 5.59 Å.U.; the true value, corrected by means of a BRAGG-spectrogram was:  $I_a = 5.65$  Å. The axial ratio  $a : c$  thus becomes: 1 : 2.3123, — as was found from the direct crystallographical measurements.

The volume of the elementary cell is  $417.6 \text{ \AA}^3$ ; as the density at  $20^\circ \text{ C.}$  is 4.51, the cell evidently contains a mass represented by:  $K_4Os_4N_4O_{12}$ .

The true specific gravity of the crystals at  $0^\circ \text{ C.}$ , therefore, must be: 4.616.

A BRAGG-spectrogram on the face (112) only showed a first order spectrum,  $d_{(112)}$  being found to be:  $3.414 \text{ \AA.U.}$ ; moreover,  $d_{(101)}$  was determined at:  $5.15 \text{ \AA.U.}$ , while  $d_{(101)}$  was calculated to be:  $5.19 \text{ \AA.U.}$  The spacings parallel these faces are, therefore, not halved.

A more detailed analysis of these rotation-spectrograms was now made by means of BERNAL's method. The spectrogram round [001] was excellently suited for this purpose, not only because it was very sharp and quite symmetrically built, but because, — as a consequence of the small value of  $I_a$  ( $= 5.65 \text{ \AA.}$ ), — the row-lines of this image are rather far apart, so that the indices of the spots could be determined with a fairly high degree of accuracy. On the other hand, the accessory spectra appear at a rather small distance from each other,  $I_c$  being very large; as a consequence the  $\alpha$ - and  $\beta$ -spots on the first and second accessory spectra appear very close together.

1. The following  $\alpha$ -diffraction-images unambiguously were observed:

*Principal Spectrum:* (200); \*\*(220); (400); \*\*(420); (440).

*First acc. Spectrum:* (101); \*(211); (301); (321); \*(411); (431); \*(501); (521).

*Second acc. Spectrum:* \*\*(112); (202); (222); \*\*(312); (332); (422); (512).

*Third acc. Spectrum:* \*(103); (213); (303); (323); \*(413); (433).

*Fourth acc. Spectrum:* (114); \*\*(204); \*\*(224); (404); \*\*(424).

*Fifth acc. Spectrum:* (105); (215); (305); (325); (415); (435).

*Sixth acc. Spectrum:* \*\*(116); \*\*(316); (336).

From this it instantly becomes clear, that only reflections occur of such planes ( $hkl$ ) for which  $(h+k+l)$  is an *even* number. Although, for instance, the planes (111) and (110) in these experiments ( $\varphi = 31^\circ + 31^\circ$ ) came into positions favourable for "reflection", no images of both these sets of planes occur in odd orders.

This fact proves that the fundamental grating of this structure is that of the *bodily-centred tetragonal cell*  $\Gamma'_t$ .

2. In the same way the rotation-spectrogram round [100], obtained with copper-radiation and an exposure of 20 m. Amp. hours, showed the following diffraction-images:

*Principal Spectrum:* (013); \*\*(004); (024); (015); (033); (008); (035); (028); \*\*(042); (019); (037); (044); (046) or (0.2.10); (039); (0.1.11); (0.0.12); (053); \*\*(048); (055).

*First acc. Spectrum:* \* (101); \* (112); (105); (123); \* (116); (125); (107); (127); (109); (136); (143); (129); (1.1.10); (138); \* (147); (1.2.11).

*Second acc. Spectrum:* \*\* (211); (213); (204); (215); \*\* (206); \*\* (224); (217); (226); (235); \*\* (228); (237); (2.0.10); (244); (2.2.10); (239); (248).

*Third acc. Spectrum:* \* (303); (321); (323); (316); (332); (307); (318); (336).

The right interpretation of this spectrogram was more difficult than in the case of the rotation-spectrogram round [001]. However, several spots occur in unsymmetrical positions, they being present only to the left or only to the right of the median plane. As the angle of oscillation is known, this fact can help us to fix the choice of the indices in ambiguous cases by means of graphical construction.

3. Especially well suited for analysis was the rotation-spectrogram obtained by rotating about the axis [110]; the indices are found by the transformations:  $2h' = h + k$ ;  $2k' = h - k$ ;  $l' = l$ .

*Principal Spectrum:* \*\* (112); (004); (116); \*\* (224); (008); (226); \*\* (332); (118); (228); (1.1.10); \*\* (336); (0.0.12).

*First acc. Spectrum:* \* (101); (103); (105); (213); (215); (107); (109); (325); (219); (327); (431); (433); (1.0.11).

*Second acc. Spectrum:* \*\* (112); (202); \*\* (204); \*\* (116); (312); \*\* (206); \*\* (208); (316); (422); (318).

*Third acc. Spectrum:* (211); (213); (301); (215); (303); (305); (307); (217); (411); (413); (415); (309); (417); (2.1.11); (521).

*Fourth acc. Spectrum:* \*\* (312); (400); (402) or (316); (404); (406).

Also in the cases 2 and 3, the even spectra are the most intensive ones; (101) occurs in all orders, but (114) is absent, its intensity in reality being very weak, as we shall soon see. The reflections: (112) and (224) are very strong; indeed, (112) is a fundamental direction of growth of the crystals.

#### § 4. Powder-Spectrograms.

Several powder-spectrograms of the salt after HULL-DEBIJE's method, were obtained as well by means of copper-, as by means of iron-radiation. The data obtained with iron-radiation are recorded in Table I.

#### § 5. Analysis of the LAUE-pattern on (001).

The LAUE-pattern on (001), of which a gnomonic projection is

TABLE I.  
Powder-Spectrogram of Potassium-Osmiamate.

No. of Line:	2 <i>l</i> in m.M.:	Estim. Intens.:	Wave- length $\lambda$ :	Angle $\theta$	$\sin^2 \theta$ (ob- served):	$\sin^2 \theta$ (cal- culated):	Indices (hkl):
1	38.94	3	$\beta$	9° 45'	0.0287	0.0285	(101)
2	43.30	9	$\alpha$	10 51	0.0354	0.0348	(101)
3	59.74	4	$\beta$	14 58	0.0667	0.0662	(112) or (103)
4	62.50	1	$\beta$	15 39	0.0728	0.0719	(004)
5	65.71	10	$\alpha$	16 27	0.0802	0.0806 0.0789	(112) or (103)
6	68.94	3	$\alpha$	17 16	0.0881	0.0877	(004)
7	73.43	2	$\beta$	18 8	0.0969	0.0962	(200)
8	80.60	4	$\alpha$	20 11	0.1191	0.1175	(200)
9	82.95	1	$\beta$	20 47	0.1259	0.1249	(211)
10	87.24	1	$\alpha$	21 51	0.1385	0.1394	(202)
11	92.24	3	$\alpha$	23 6	0.1539	0.1524	(211)
12	97.33	3	$\alpha$	24 23	0.1704	0.1692	(105)
13	105.50	2	$\alpha$	26 25	0.1979	0.1962	(213)
14	108.23	5	$\alpha$	27 6	0.2075	0.2055	(204)
15	109.53	1	$\beta$	27 26	0.2123	0.2104	(222) or (116)
16	116.21	3	$\alpha$	29 6	0.2365	0.2351	(220)
17	122.19	5	$\alpha$	30 36	0.2591	0.2571 0.2560	(222) or (116)
18	129.24	3	$\alpha$	32 22	0.2866	0.2862	(215)
19	132.74	3	$\alpha$	33 14	0.3004	0.2998	(107)
20	136.88	5	$\alpha$	34 16	0.3170	0.3148 0.3158 0.3137	(206), (312) or (303)
21	138.71	2	$\alpha$	34 44	0.3246	0.3230	(224)
22	145.69	1	$\alpha$	36 29	0.3536	0.3507 0.3542	(008) or (226)
23	153.90	3	$\alpha$	38 32	0.3881	0.3873	(321)
24	157.62	2	$\alpha$	39 28	0.4040	0.4051	(118)
25	160.62	2	$\alpha$	40 13	0.4169	0.4156	(217)

TABLE I. (Continued).

No. of Line:	2 <i>l</i> in m.M.:	Estim. Intens.:	Wave-length $\lambda$ :	Angle $\Theta$	$\sin^2 \Theta$ (observed):	$\sin^2 \Theta$ (calculated):	Indices (hkl):
26	164.22	3	$\alpha$	41° 7'	0.4324	0.4322	(226)
27	169.09	1	$\beta$	42 20	0.4535	0.4565	(404)
28	173.08	4	$\alpha$	43 20	0.4709	0.4699	(400)
29	178.06	4	$\alpha$	44 35	0.4927	0.4918	(316) or (402)
30	180.81	1	$\alpha$	45 17	0.5049	0.5048	(411)
31	184.26	1	$\alpha$	46 8	0.5198	0.5192	(325)
32	187.57	1	$\alpha$	46 58	0.5467	0.5486	(413)
33	191.20	3	$\alpha$	47 53	0.5503	0.5506	(332)
34	192.74	4	$\alpha$	48 16	0.5569	0.5576	(404)
35	199.72	4	$\alpha$	50 1	0.5871	0.5874	(228) or (420)
36	205.16	3	$\alpha$	51 23	0.6105	0.6094	(316) or (422)
37	210.94	1	$\alpha$	52 49	0.6340	0.6365	(415)
38	217.44	2	$\alpha$	54 28	0.6623	0.6657	(335)
39	220.53	4	$\alpha$	55 13	0.6746	0.6751	(424)
40	232.81	2	$\alpha$	58 18	0.7239	0.7259	(336)
41	236.57	2	$\alpha$	59 14	0.7383	0.7397 0.7395	(431) or (501)
42	248.87	4	$\alpha$	62 19	0.7842	0.7847 0.7836	(426), (433) or (503)
43	260.9	3	$\alpha$	65 20	0.8258	0.8206	(408)
44	267.6	5	$\alpha$	67 1	0.8475	0.8500	(514)
45	276.0	2	$\alpha$	69 7	0.8729	0.8736	(505)
46	286.1	2	$\alpha$	71 39	0.9009	0.9010	(523)
47	302.9	4	$\alpha$	75 51	0.9402	0.9398	(440)
48	313.4	4	$\alpha$	78 28	0.9599	0.9605 0.9617	(516) or (442)

Radius of Camera: 57.2 m.M. Exposure: 14 m. Amp. hours.

Wave-Length:  $\lambda_{\alpha} = 1.9366 \text{ \AA.}$ ;  $\lambda_{\beta} = 1.7527 \text{ \AA.}$ Quadratic Equation:  $\sin^2 \Theta = 0.02937 \cdot (h^2 + k^2) + 0.005481 \cdot l^2 \dots \dots \dots \quad (\alpha)$  $\sin^2 \Theta = 0.02406 \cdot (h^2 + k^2) + 0.004492 \cdot l^2 \dots \dots \dots \quad (\beta)$ Parameter of the Lattice:  $a_0 = 5.65 \text{ \AA.}$ ;  $c_0 = 13.08 \text{ \AA.}$  Bodily-centred, tetragonal cell  $\Gamma_t'$ .

Specific Weight: 4.626 at 0° C.; 4 Molecules pro cell.

represented in Fig. 3, was analyzed in the usual way. The data obtained are collected in Table II.

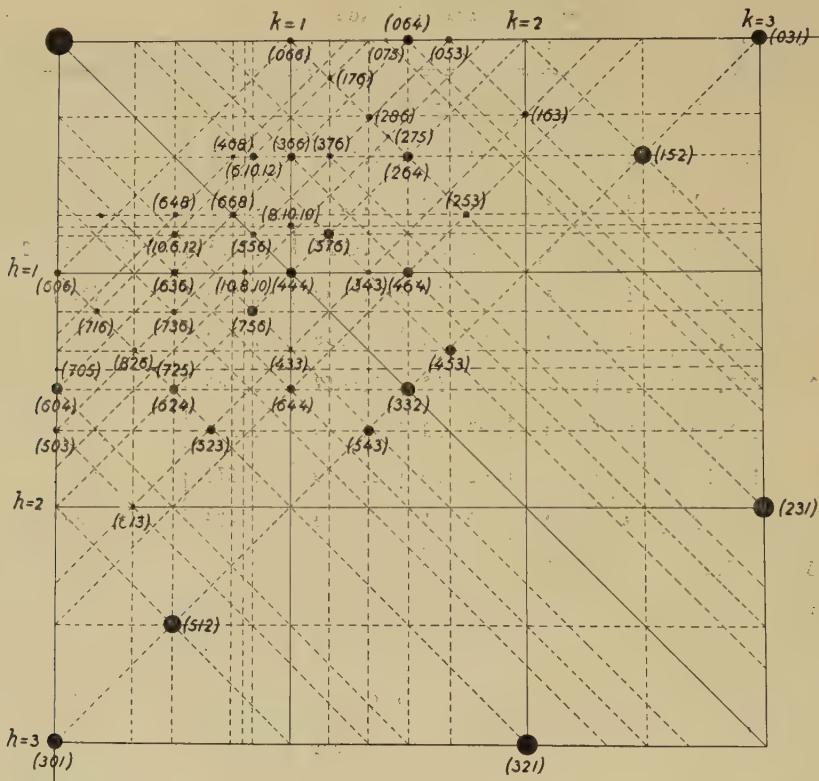


Fig. 3. Gnomonic Projection of the LAUE-pattern on (001) of Potassium-Osmiamate.

The sum of the indices  $(h+k+l)$  of the images observed proves always to be an even number; the fundamental lattice, therefore, is the bodily-centred one  $\Gamma'$ , as already previously stated.

## § 6. The Structure of Potassium-Osmiamate and the Calculation of the Parameters.

From the study of the occurring indices-triplets, the special space-group to which the structure of *potassium-osmiamate* must belong, can be deduced by the following reasonings.

As the crystals of the potassium-salt have a centre of symmetry and do not possess piezo-electrical properties, the classes  $S_4$ ,  $C_4$ ,  $V$ ,  $D_4$  and  $C_{4v}$  are beforehand excluded. The LAUE-pattern on  $\{001\}$  excludes  $D_{4H}$ ; so that only  $C_{4H}$  remains. The corresponding space-groups can only be:  $C_{4H}^5$  and  $C_{4H}^6$ . In the first group no extinctions, — besides those of  $\{h\ k\ l\}$ , in which  $(h+k+l)$  is odd, — need occur. But we found, that  $(002)$  is absent, only  $(004)$ ,  $(008)$ ,  $(00.12)$  being met with; moreover, all spacings

TABLE II.

1 <sup>st</sup> Order Symbols of the Spots:	Estim. Intens.:	Glancing Angle $\theta$ :	$\lambda$ (1 <sup>st</sup> order):	$\lambda$ (2 <sup>nd</sup> order):	$\lambda$ (3 <sup>rd</sup> order):	$\lambda$ (4 <sup>th</sup> order):	$\lambda$ (5 <sup>th</sup> order):	$\lambda$ (6 <sup>th</sup> order):
(512)	10	9° 23'	0.3658	—	—	—	—	—
(301)	9	8 5	0.5325	—	—	—	—	—
(321)	9 and 7	6 28	0.3710	—	—	—	—	—
(332)	8	11 23	0.5219	—	—	—	—	—
(312)	7	15 3	(0.9123)	0.4562	—	—	—	—
(302)	5	16 18	(1.0038)	0.5019	—	—	—	—
(111)	5	16 43	(2.2370)	(1.1185)	(0.7457)	0.5593	—	—
(523)	4	13 17	0.4784	—	—	—	—	—
(212)	4	20 59	(1.7023)	(0.8512)	0.5674	—	—	—
(101)	3	23 12	(4.1216)	(2.0608)	(1.3739)	(1.0304)	(0.8243)	0.6869
(322)	3	13 17	(0.7117)	0.3558	—	—	—	—
(433)	2	{ 14 11	0.5501	—	—	—	—	—
(503)	2	{ 14 24	—	—	—	—	—	—
(413)	2	17 6	(0.7856)	0.3928	—	—	—	—
(334)	2	22 9	(0.9323)	0.4662	—	—	—	—
(324)	1	25 20	(1.2522)	0.6261	—	—	—	—
(455)	1	14 11	0.5355	—	—	—	—	—
(716)	2	19 40	0.5174	—	—	—	—	—
(736)	2	18 26	0.5061	—	—	—	—	—
(705)	1	16 54	0.4558	—	—	—	—	—
(613)	1	11 38	0.3794	—	—	—	—	—
(536)	3	23 57	(0.7274)	0.3637	—	—	—	—
(556)	2	20 7	0.5174	—	—	—	—	—
(725)	1	20 11	0.4241	—	—	—	—	—
(756)	4	16 44	0.3636	—	—	—	—	—
(543)	3	11 25	0.3439	—	—	—	—	—

The wave-lengths produced at this voltage have a minimum of 0.28 Å., a maximum of about 0.63 Å.

$$\lambda = \frac{2 \cdot c_0 \cdot l}{(h^2 + k^2) \frac{c_0^2}{a_0^2} + l^2}$$

of  $\{h k O\}$  are halved. No reflections: (110), (330), (310) were observed. *The only possible space-group is, therefore,  $C_{4H}^6$* <sup>1</sup>). Indeed, the structure of the salt is, as we shall see, quite analogous to that of *scheelite*, *stolzite*, *powellite*, *wulfenite*, of  $NaIO_4$ ,  $KIO_4$ ,  $KReO_4$ , etc.<sup>2</sup>). Also in these cases the overwhelming number of properties of these compounds appear to be in accordance with the higher symmetry  $D_{4H}$ , except the quite analogous deviations in the intensities of the inner spots of the LAUE-patterns on  $\{001\}$ . These deviations are only caused by the unsymmetrical position of the four oxygen-atoms. As a consequence of their feeble diffracting power these atoms contribute only little to the intensities of these reflections, especially in the higher orders, so that the symmetry of the LAUE-pattern of the *osmiamate* is chiefly determined by the position of the *K*- and *Os*-atoms, in the same way as it is determined by that of the *Ca*-, *Pb*-, *K*-, and the *W*-, *Mo*-, *I*-, and *Re*-atoms in the compounds just mentioned. The oxygen-atoms of these salts occupy positions which are in agreement with the observed intensities; but this is no longer true, if the symmetry of the space-group  $D_{4H}^{19}$  is assumed as the right one, as is, for instance, the case<sup>3</sup>), with *zircon*:  $ZrSiO_4$ .

There is no doubt as to the exactness of  $C_{4H}^6$  as the right space-group of all the compounds mentioned, although the deviations from the symmetry  $D_{4H}^{19}$  are in some cases, as, for instance, in those of *scheelite* and *potassium-osmiamate*, rather small.

The four *osmium*- and *potassium*-atoms (or-ions) can be distributed over the two possible fourfold places in the elementary cell. The oxygen- and nitrogen-atoms (or-ions), with the atomic numbers 8 and 7 respectively, and with equal electronic configurations for  $O''$  and  $N'''$  in the complex ion:  $\{(O'')_3Os^{VIII}(N''')\}^1$  can be distributed over a sixteenfold position;

<sup>1</sup>) In this connection, it must be remarked, that the criteria given for  $C_{4H}^6$  by H. MARK, *Die Verwendung der Roentgenstrahlen in Chemie und Technik*, (1926), p. 390, are erroneous, as they are appropriate only in the case of the face-centred cell of double volume.  $C_{4H}^5$  is, as already demonstrated, not in accordance with the observed reflections: as (002) is absent, the *K*- and *Os*-atoms can only have the position (e) in R. W. G. WYCKOFF, *The Analytical Expression*, etc., (1922), p. 82, with  $u = \frac{1}{8}$  and  $\frac{5}{8}$ . But then (110) must be very intensive, which is not true. With respect to the behaviour of the  $(NH_4)$ - *Rb*-, and *Cs-Osmiamates* to be described later on, it would be possible, that the *K*-salt also possesses a lower symmetry. But at the moment there is no reason for supposing this.

<sup>2</sup>) On *scheelite*, *powellite*, *stolzite*, *wulfenite* and the corresponding *Ba*-salts, conf.: R. G. DICKINSON, *Journ. Amer. Chem. Soc.*, **42**, (1920), 85; P. NIGGLI and K. FAESY, *Zeits. f. Kryst.* **59**, (1924), 473; L. VEGARD, *Skrift, Norsk. Vidensk. Ak.-Oslo*, **1**, Mat. Kl. (1925), N°. 11; *Phil. Mag.*, **1**, (1926), 1151; T. BARTH, *Norsk. Geol. Tidskr.*, **9**, (1926), 24; L. VEGARD and A. REFSUM, *Skrift, N. Vid. Ak. Oslo*, (1927), N°. 2; on  $NaIO_4$  and  $KJO_4$ : L. M. KIRPATRICK and R. G. DICKINSON, *Journ. Amer. Chem. Soc.*, **48**, (1926), 2327; E. HYLLERAAS, *Zeits. f. Phys.*, **39**, (1926), 203; on  $KReO_4$ : F. MACHATSCHKI, *Zeits. f. Kryst.*, **72**, (1930), 541; E. BROCH, *Zeits. f. phys. Chem.*, **6**, B, (1929), 22.

<sup>3</sup>) R. W. G. WYCKOFF and S. B. HENDRICKS, *Zeits. f. Kryst.*, **66**, (1927), 73.

a twelvefold position does not occur<sup>1)</sup> in the space-group  $C_{4H}^6$ , nor would there be any other fourfold position available, after the *osmium*- and *potassium*-ions once are fixed in:

a) Four *Os* at:  $[0 \frac{3}{4} \frac{1}{8}]$  ;  $[0 \frac{1}{4} \frac{7}{8}]$  ;  $[\frac{1}{2} \frac{1}{4} \frac{5}{8}]$  ;  $[\frac{1}{2} \frac{3}{4} \frac{3}{8}]$

b) Four *K* at:  $[0 \frac{3}{4} \frac{5}{8}]$  ;  $[0 \frac{1}{4} \frac{3}{8}]$  ;  $[\frac{1}{2} \frac{1}{4} \frac{1}{8}]$  ;  $[\frac{1}{2} \frac{3}{4} \frac{7}{8}]$

The twelve *oxygen*- and four *nitrogen*-ions together, therefore, obtain the parameters:

$[x, y, z]$  ;  $[\frac{1}{4} - y, \frac{3}{4} + x, \frac{1}{4} + z]$  ;  $[\frac{1}{2} + x, \frac{1}{2} + y, \frac{1}{2} + z]$  ;  $[\frac{3}{4} - y, \frac{1}{4} + x, \frac{3}{4} + z]$ .  
 $[\bar{x}, \frac{1}{2} - y, z]$  ;  $[\frac{3}{4} + y, \frac{3}{4} - x, \frac{1}{4} + z]$  ;  $[\frac{1}{2} - x, \bar{y}, \frac{1}{2} + z]$  ;  $[\frac{1}{4} + y, \frac{1}{4} - x, \frac{3}{4} + z]$ .  
 $[\frac{1}{4} + y, \frac{3}{4} - x, \frac{1}{4} - z]$  ;  $[\frac{1}{2} - x, \frac{1}{2} - y, \frac{1}{2} - z]$  ;  $[\frac{3}{4} + y, \frac{1}{4} - x, \frac{3}{4} - z]$  ;  $[\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}]$ .  
 $[\frac{3}{4} - y, \frac{3}{4} + x, \frac{1}{4} - z]$  ;  $[\frac{1}{2} + x, y, \frac{1}{2} - z]$  ;  $[\frac{1}{4} - y, \frac{1}{4} + x, \frac{3}{4} - z]$  ;  $[x, \frac{1}{2} + y, \bar{z}]$ .

Now  $(\frac{3}{4} + x)$  must differ from  $y$ ; for the second order of (101) is present, although with a small intensity. For  $(\frac{3}{4} + x) = y$ ,  $|S|_{(202)}^2$  would be zero, as  $S_{(202)} = \cos 2\pi \{(2x + 2z), (-2x + 2z), (2y - 2z), (-2y - 2z), (-2y + 2z), (2y + 2z), (-2x - 2z), (2x - 2z)\} = 2 \cdot \cos 2\pi \{(2x + 2z), (-2x + 2z), (2y + 2z), (2y - 2z)\}$ , while all sinus-functions are zero. For  $y = \frac{3}{4}$ ,  $|S|$  would be:  $2 \cos 2\pi \{(2x + 2z), (-2x + 2z), (\frac{1}{2} + 2z), (\frac{1}{2} + 2z)\}$ . From the radius of the O-ion follows, that  $x$  must be very close to: 0.25; but for  $x = 0.25$ , the intensity of (202) would be very great, and this is not true. In the same way, for  $y = \frac{3}{4}$ , the intensities of (114) and (118) would be zero, which neither is the case<sup>2)</sup>.

The right values for  $x$ ,  $y$  and  $z$  appear to be:

$$x = 0.23; \quad y = 0.80; \quad z = 0.06.$$

The parameters of the *oxygen*- and *nitrogen*-ions thus become:

$0.23; \quad 0.80; 0.06]; [-0.55; \quad 0.98; 0.31]; [\quad 0.73; \quad 0.30; 0.56]; [-0.05; \quad 0.48; \quad 0.81]$   
 $-0.23; -0.30; 0.06]; [\quad 0.55; \quad 0.52; 0.31]; [\quad 0.27; -0.80; 0.56]; [\quad 0.05; -0.02; \quad 0.81]$   
 $-0.05; \quad 0.52; 0.19]; [\quad 0.27; -0.30; 0.44]; [\quad 0.55; \quad 0.02; 0.69]; [-0.23; -0.80; -0.06]$   
 $-0.05; \quad 0.98; 0.19]; [\quad 0.73; \quad 0.80; 0.44]; [-0.55; \quad 0.48; 0.69]; [\quad 0.23; \quad 0.30; -0.06]$

Bij a translation of these positions by adding  $(0, -\frac{3}{4}, -\frac{1}{8})$  to these values, the final positions of all the ions considered become:

a) Four *Os<sup>VIII</sup>*-ions at:  $[0 \ 0 \ 0]$  ;  $[0 \frac{1}{2} \frac{3}{4}]$  ;  $[\frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2}]$  ;  $[\frac{1}{2} 0 \frac{1}{4}]$ .

b) Four *K*-ions at:  $[0 \ 0 \ \frac{1}{2}]$  ;  $[0 \frac{1}{2} \frac{1}{4}]$  ;  $[\frac{1}{2} \frac{1}{2} 0]$  ;  $[\frac{1}{2} 0 \frac{3}{4}]$ .

<sup>1)</sup> R. W. G. WYCKOFF, *The Analytical Expression, etc.* Washington, (1922), 82, under *a*, *b* and *f*. For the purpose of comparison with the co-ordinates of  $KIO_4$  as given in literature, these positions must be shifted over  $-\frac{3}{4}$  for  $y$  and  $-\frac{1}{8}$  for  $z$ .

<sup>2)</sup> For  $y = \frac{3}{4}$ ,  $|S|_{(211)} = -|S|_{(\bar{2}\bar{1}1)}$ , so that (211) and  $(\bar{2}\bar{1}1)$  would have equal intensities. But this would exactly be the 16-fold position *h* of  $D_{4H}^{19}$ .

f) Twelve  $O''$ -ions + four  $N'''$ -ions at:

$$\begin{aligned}
 & [0.23; 0.05; -0.065] ; [0.73; -0.45; 0.435] ; \\
 & [-0.23; -0.05; -0.065] ; [0.27; -0.55; 0.435] ; \\
 & [0.05; -0.23; 0.065] ; [0.55; -0.73; 0.565] ; \\
 & [-0.05; 0.23; 0.065] ; [-0.55; -0.27; 0.565] ; \\
 & [-0.55; 0.23; 0.185] ; [-0.05; -0.27; 0.685] ; \\
 & [0.55; -0.23; 0.185] ; [0.05; -0.73; 0.685] ; \\
 & [0.27; -0.05; 0.315] ; [-0.23; -0.55; -0.185] ; \\
 & [0.73; 0.05; 0.315] ; [0.23; -0.45; -0.185] .
 \end{aligned}$$

The sequence of the intensities of  $\{h k l\}$ , calculated by means of these parameters<sup>1)</sup>, prove to show a perfect parallelism with those estimated visually, as may be seen from the Fig. 4, in which the relative intensities of the different planes  $\{h k l\}$  are, for both cases mentioned, graphically plotted against the sixfold glancing angle  $\theta$ . ( $\theta$ ) for each plane.

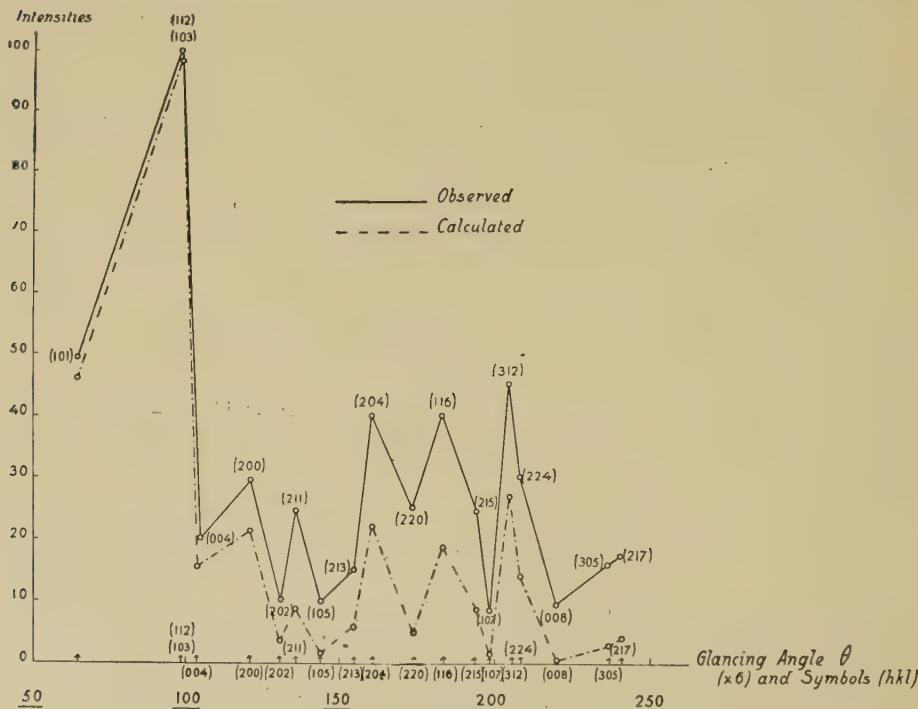


Fig. 4. Estimated and Calculated Intensities of the Diffractionlines of Potassium-Osmiamate.

1) The diffracting power of the Os-ion is proportional to  $(76-8)=68$ ; that of both the  $O$ - and  $N$ -ions proportional to  $(8+2)$  and  $(7+3)$  respectively, i.e. to 10; that of the potassium-ion to  $(19-1)=18$ . The  $O$ - and  $N$ -ions, in couples, are situated in planes, which only make a very small angle with  $(100)$  and  $(010)$ . If they were exactly situated within these planes, the symmetry would be  $D_{4H}^{19}$ , as in the case of zircon.

The nitrogen- and oxygen-ions are, therefore, arranged round the very small central Os-ions in such a way that they are situated in the corners of a tetragonal bisphenoid which is *very close to a regular tetrahedron, but the latter somewhat compressed in the direction of the c-axis.*

The symmetry  $C_{4H}^6$  in this case only is manifested as a consequence of the particular circumstance, that with respect to the action of the X-rays, the  $O''$ - and  $N'''$ -ions cannot be distinguished from each other in the potassium-salt, although the electrical charges of their nuclei are not the same (8 and 7 respectively). If, however, these ions be considered as *not completely identical*, the true symmetry of the crystals can never be tetragonal-bipyramidal: for in the latter case, — i.e. if the  $N'''$ - and  $O''$ -ions be considered as *different*, — no horizontal symmetry-plane can be present. Then the highest possible symmetry could either be the tetragonal-pyramidal or the monoclinic one. As the absence of a symmetry-centre could *not* be proved, — while apparently the  $K$ -salt certainly exhibits a symmetry with respect to a horizontal plane<sup>1)</sup>, — the first possibility

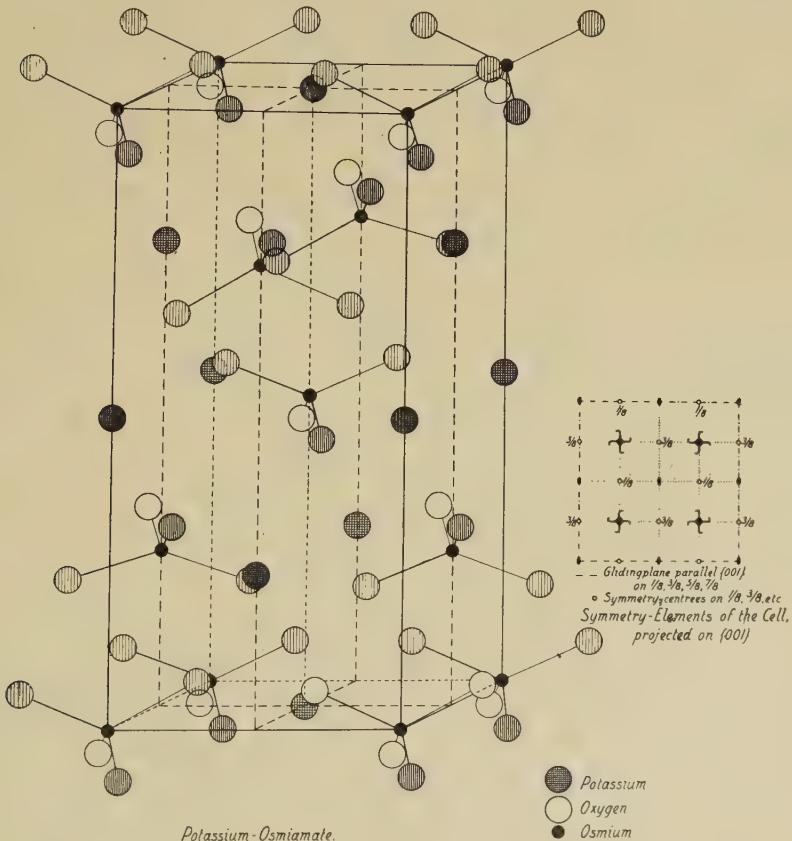


Fig. 5. The Structure of Potassium-Osmiamate.

<sup>1)</sup> The presence of this horizontal plane of symmetry excludes the possibility of potassium-osmiamate being rhombic-bisphenoidal.

must most probably be excluded, and the crystals, therefore, should be considered as really monoclinic. The tendency to form complexes of pseudo-tetragonal symmetry then, however, proves to be so great and this pseudo-tetragonal symmetry proves to be so perfect, that it is by no means any more possible to distinguish the crystals from really tetragonal ones. As we shall soon see, this pseudo-tetragonal character is equally well preserved in the case of the other *alkali-salts* of this type, which themselves certainly have a lower symmetry than the *K-salt*.

If a comparison is made between *potassium-osmiamate* and the other tetragonal-bipyramidal salts before mentioned, then it becomes clear, that in *potassium-periodate*:  $KIO_4$  the planes of the couples of  $O''$ -ions make the greatest angle with the planes (100) and (010); that in the case of *tungstate of lead (wulfenite)*:  $PbWO_4$  that angle is somewhat smaller; in that of *potassium-osmiamate* still smaller; and in that of *scheelite*:  $CaWO_4$  exceedingly small, — so that in its LAUE-pattern on (001) almost no deviation from a holohedral symmetry is any more observable. Finally, in *zircon*:  $ZrSiO_4$ , the couples of  $O''$ - and  $N'''$ -ions are situated *within* the planes (100) and (010), and the symmetry now becomes perfectly ditetragonal, corresponding to the space-group  $D_{4H}^{19}$ . Evidently these particularities are connected with the different electrostatic attractions of the ions  $K^+$ ,  $Pb^{++}$ ,  $Ca^{++}$  and  $Zr^{IV}$  for the surrounding  $O''$ -ions on the one hand, and those of the central ions  $IV^{II}$ ,  $Os^{VIII}$ ,  $W^{VI}$ , and  $Si^{IV}$  on the other hand. As we shall soon see, the result of such influences is still more clearly exhibited in the case of the other *alkali-osmiamates*.

*Groningen, Laboratory for Inorganic and Physical Chemistry of the University.*

**Physics. — Die Gleichung der Schmelzkurve.** Von J. J. VAN LAAR.

(Communicated at the meeting of May 28, 1932).

I.

Bekanntlich hat schon SIMON bei seinen Versuchen über die Schmelzkurven von verschiedenen Stoffen<sup>1)</sup> die empirische Gleichung  $p+a=CT^c$  aufgestellt, und dieselbe an seinen Beobachtungen bei  $He$ ,  $Ne$ ,  $Ar$ ,  $H_2$  und  $N_2$  geprüft. Wir werden im folgenden versuchen eine theoretische Beziehung herzuleiten; wobei sich herausstellen wird, dass diese fast

<sup>1)</sup> SIMON und GLATZEL, Z. anorg. allg. Chem., **178**, 309—316 (1929); SIMON, RUHEMANN und EDWARDS, Z. f. physikal. Chem. (B) **2**, 340—344 (1929), **6**, 62—77 (1929) ( $He$  I und II); Ibid. **6**, 331—342 (1930) ( $H_2$ ,  $Ne$ ,  $N_2$  und  $Ar$ ); SIMON und STECKEL, BODENSTEIN-Festband, 737—744 (1931) (Schmelzwärme und Dichte  $He$ ).

identisch ist mit der von SIMON gefundenen empirischen Gleichung. Nur fehlt bei SIMON ein Glied mit  $BT$ , denn es wird sogleich die theoretische Beziehung

$$\underline{p + a = BT + CT^{1+\epsilon}}$$

gefunden werden, wobei auch die physikalische Bedeutung der Größen  $a$ ,  $B$  und  $\epsilon$  festgestellt werden kann.

Die CLAPEYRON'sche Beziehung lautet:

$$\frac{dp}{dt} = \frac{L}{T\Delta v} = \frac{\lambda + p\Delta v}{T\Delta v} = \frac{p}{T} + \frac{\lambda/\Delta v}{T}, \dots \dots \dots \quad (1)$$

wobei sich ergeben wird, dass die *aussere Arbeit*  $p\Delta v$  niemals gegenüber der *inneren Schmelzwärme*  $\lambda$  vernachlässigbar ist ( $L$  ist die *totale Schmelzwärme*). Bei  $He$  beträgt  $p\Delta v$  zwischen  $15^\circ$  und  $20^\circ$  abs. sogar fast  $2/3$  der totalen Schmelzwärme! (vgl. § III).

Nun kann  $\lambda$  immer allgemein durch eine Gleichung von der linearen Form  $(^3/2$  bezieht sich auf einatomige Stoffe)

$$\lambda = \lambda_0 - \gamma_1(T - T_0) - \frac{3}{2}R(T - T_0) + \epsilon_1 p \dots \dots \quad (a)$$

dargestellt werden, wo  $\lambda_0$  sich auf den Schnittpunkt  $D$  der verlängerten Schmelzkurve mit der  $T$ -Achse bezieht. ( $p = 0$ ,  $T = T_0$ ; siehe Fig. 1). Denn es ist z.B.

$$\lambda = e_2 - e_1 = \left( -\frac{a_2}{v_2} + k_2 T \right) - \left( -\frac{a_1}{v_1} + k_1 T \right),$$

wo  $e_2$  sich auf den flüssigen Zustand und  $e_1$  sich auf den festen Zustand bezieht<sup>1)</sup>. Bei einatomigen Stoffen ist  $k_1 = \frac{3}{2}R$ ,  $k_2 = 3R$  (Degeneration ausgeschlossen), so dass alsdann

$$\lambda = \left( \frac{a_1}{v_1} - \frac{a_2}{v_2} \right) - \frac{3}{2}RT$$

wird. Hierin nehmen nun  $v_1$  und  $v_2$  immer zu mit  $T$ , und ab mit  $p$ ; so dass die Gleichung (a) rechtfertigt ist, auch im Falle dass  $\lambda = e_2 - e_1$

1) Wenn nämlich die Energie im festen Zustande, bei Temperaturen, wo noch keine Degeneration eingetreten ist, durch eine ähnliche Beziehung wie im flüssigen Zustande dargestellt werden kann. Die Zustandsgleichung hat dann wiederum die Form  $p + \frac{a}{v^2} = \frac{RT}{v-b}$ , wo das zweite Glied auch die abstossenden Kräfte enthält  $\left( p v + \frac{a}{v} - RT \frac{b}{v-b} = RT \right)$  ist dann die Virialgleichung. Siehe hierüber eine Reihe von Artikeln in den Versl. K. Akad. Wet. Amsterdam **34**, 1303—1320 (1925), **35**, 159—176 und 403—417 (1926); Proceed. ibid. **29**, 95—112 (1925), 497—514 und 683—698 (1926)], wo man verschiedene Anregungen auf diesem Gebiete finden wird. Vgl. auch Z. Physik **62**, 77—89 (1930).

vielleicht durch eine etwas andere theoretische Beziehung dargestellt werden muss.

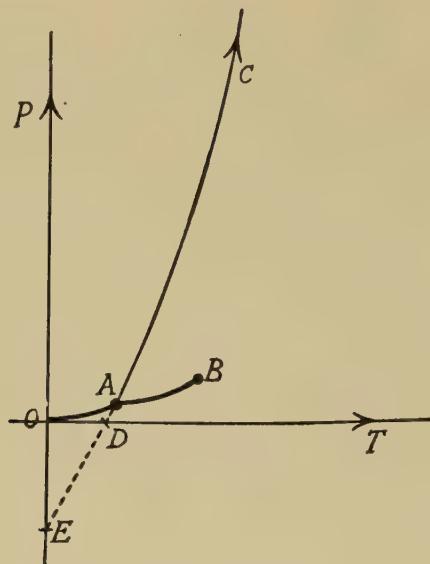


Fig. 1

$A$  = Tripelpunkt,  $B$  = Krit. P.,  $OD = T_0$ .

In gleicher Weise wird  $\Delta v$  dargestellt werden können durch eine Gleichung

$$\Delta v = v_2 - v_1 = \Delta v_0 + \gamma_2 (T - T_0) - \varepsilon_2 p, \dots \quad (\beta)$$

wo  $\Delta v_0$  sich wiederum auf den Punkt  $D(p=0, T=T_0)$  bezieht. Man hat demnach angenähert:

$$\frac{\lambda}{\Delta v} = \frac{\lambda_0}{\Delta v_0} \left[ 1 - \left( \frac{\gamma_1}{\lambda_0} + \frac{\gamma_2}{\Delta v_0} + \frac{3}{2} \frac{R}{\lambda_0} \right) (T - T_0) + \left( \frac{\varepsilon_1}{\lambda_0} + \frac{\varepsilon_2}{\Delta v_0} \right) p \right].$$

Setzt man nun

$$\frac{\lambda}{\Delta v} = \theta \quad ; \quad \frac{\lambda_0}{\Delta v_0} = \theta_0,$$

so hat man also:

$$\underline{\theta = \theta_0 - \gamma (T - T_0) + \varepsilon p} = \underline{\theta'_0 - \gamma T + \varepsilon p}, \dots \quad (2)$$

wo somit angenähert

$$\gamma = \frac{\gamma_1}{\Delta v_0} + \frac{\gamma_2 \lambda_0}{(\Delta v_0)^2} + \frac{3}{2} \frac{R}{\Delta v_0} \quad ; \quad \varepsilon = \frac{\varepsilon_1}{\Delta v_0} + \frac{\varepsilon_2 \lambda_0}{(\Delta v_0)^2} \quad ; \quad \theta'_0 = \theta_0 + \gamma T_0 \dots \quad (\gamma)$$

ist. Die obige CLAPEYRON'sche Gleichung (1) wird nunmehr:

$$\frac{dp}{dt} = \frac{p}{T} + \frac{\theta}{T} = \frac{p}{T} + \frac{\theta'_0 - \gamma T + \varepsilon p}{T},$$

oder

$$T \frac{dp}{dt} = (1 + \varepsilon) \left( p + \frac{\theta'_0}{1 + \varepsilon} \right) - \gamma T,$$

wo  $\frac{dp}{dt}$  durch  $\frac{d}{dt} \left( p + \frac{\theta'_0}{1 + \varepsilon} \right)$  ersetzt werden kann. Setzt man nun  $p + \frac{\theta'_0}{1 + \varepsilon} = y$ , so hat man die Differentialgleichung

$$T \frac{dy}{dt} - (1 + \varepsilon) y = -\gamma T,$$

oder

$$T^{2+\varepsilon} \frac{d}{dy} \frac{y}{T^{1+\varepsilon}} = -\gamma T, \quad \text{d.h.} \quad \frac{d}{dy} \frac{y}{T^{1+\varepsilon}} = -\frac{\gamma}{T^{1+\varepsilon}}.$$

Integriert, ergibt das:

$$\frac{y}{T^{1+\varepsilon}} = \frac{\gamma}{\varepsilon} \frac{1}{T^\varepsilon} + C,$$

oder auch

$$p + \frac{\theta'_0}{1 + \varepsilon} = \frac{\gamma}{\varepsilon} T + C T^{1+\varepsilon}.$$

Setzt man nun:

$$\frac{\theta'_0}{1 + \varepsilon} = a \quad ; \quad \frac{\gamma}{\varepsilon} = B, \dots \dots \dots \quad (\delta)$$

wo die Größen  $\gamma$ ,  $\varepsilon$  und  $\theta'_0$  durch (γ) gegeben sind, während nach (2)  $\theta = \theta'_0 - \gamma T + \varepsilon p$  ist, so wird schliesslich für die theoretische Gleichung der Schmelzkurve gefunden:

$$p + a = B T + C T^{1+\varepsilon}, \quad \dots \dots \dots \quad (3)$$

wo  $a$  und  $B$  durch (δ) gegeben sind, während nach (2)  $\gamma$  und  $\varepsilon$  die Temperatur- bzw. Druckkoeffizienten der Grösse  $\theta = \lambda : \Delta v$  sind. Die physikalische Bedeutung von  $C$  geht aus

$$\frac{dp}{dt} = B + (1 + \varepsilon) C T^\varepsilon$$

hervor, wenn man diese Gleichung auf den Punkt  $D$  ( $T = T_0$ ) bezieht.

Es ist dann nämlich  $C = \left[ \left( \frac{dp}{dt} \right)_0 - B \right] : (1 + \varepsilon) T_0$ .

Man sieht, dass die Gleichung (3) der SIMON'schen Beziehung  $p + a = CT^c$  sehr ähnlich ist; nur fehlt bei dieser letzteren das Glied  $BT$ , wo  $B = \gamma : \varepsilon$  doch wohl niemals  $= 0$  sein wird. Denn aus (γ) geht hervor, dass  $\gamma$  doch *wenigstens*  $= \frac{3}{2} \frac{R}{\Delta v_0}$  ist. Dass jedoch die einfache SIMON'sche Gleichung gleich gute Resultate ergiebt, kommt daher, dass man die beiden Glieder mit  $T$  und  $T^{1+\varepsilon}$  ohne praktischen Nachteil durch ein einziges Glied mit  $T^c$  ersetzen kann.

Was die Grösse  $a$  betrifft, so ist das offenbar der (negative) Druck, welche die verlängerte Schmelzlinie bei  $T = 0$  aufweisen wird (Fig. 1 die Strecke  $OE$ ). Diese Grösse ist nach (δ) und (γ):

$$a = \frac{\theta'_0}{1+\varepsilon} = \frac{\theta_0 + \gamma T_0}{1+\varepsilon} = \frac{\lambda_0 / \Delta v_0 + \gamma T_0}{1+\varepsilon} = \\ = \left[ \left( \frac{a_1 / v_1 - a_2 / v_2}{v_2 - v_1} \right)_0 - \frac{3}{2} \frac{RT_0}{\Delta v_0} + \gamma T_0 \right] : (1+\varepsilon).$$

Man ersieht hieraus, dass  $a$  zwar mit dem inneren Druck der flüssigen (bzw. fluiden) Phase "in Beziehung" steht, aber doch nicht damit identisch ist. Dabei spielt doch auch der innere Druck der *festen* Phase eine gleiche Rolle wie der der flüssigen Phase!

*Bemerkung.* In einer früheren Mitteilung<sup>1)</sup> habe ich schon ausführlich über die Schmelzkurve geschrieben, auch für den Fall, dass entweder bei sehr niedrigen Temperaturen, oder bei sehr hohen Drucken Energie-Degeneration bei der *festen* Phase eintritt. Bei sehr hohen Drucken wird nämlich die sogenannte "charakteristische" Temperatur erhöht (vgl. auch die oben zitierten Aufsätze in den Versl. Amst.), so dass schon bei Temperaturen, wo sonst noch von keinerlei Degeneration die Rede ist, dieselbe eintritt. Dennoch glaube ich jetzt nicht mehr, dass die Schmelzkurve (vgl. die Figuren auf S. 323 (bzw. 395) des soeben zitierten Aufsatzes) einer gewissen vertikalen Axe asymptotisch verläuft, so dass oberhalb dieser Grenztemperatur kein fester Zustand möglich wäre, wie hoch auch der Druck sei<sup>2)</sup>. Vielmehr halte ich es nach der oben gegebenen Theorie für wahrscheinlicher, dass die Schmelzkurve, der Beziehung (3) gemäss, nach immer höheren Temperaturen verläuft, so dass der flüssige (bzw. fluide) Zustand stets in den festen Zustand übergehen kann, wie hoch auch die Temperatur sei, wenn nur der Druck einen genügend hohen Wert erreicht.

<sup>1)</sup> Versl. K. Akad. Wet. Amsterdam **36**, 311—328 (1927); Proceed. ibid. **30**, 383—400 (1927).

<sup>2)</sup> Vgl. auch E. JÄNECKE, Z.f. physikal. Chem. (A) **156**, 161—175 (1931). Auch TAMMANN, "Aggregatzustände" (Leipzig, L. VOSS, 1922), speziell S. 99—104, wo auf S. 99 (ganz unten) betont wird, dass nach seinen Versuchen und denjenigen von BRIDGMAN die Schmelzkurven bei höheren Drucken stets geradliniger verlaufen. Das würde darauf hinweisen, dass der Druckkoeffizient  $\varepsilon$  alsdann kleiner und kleiner wird, sodass  $B T + C T^{1+\varepsilon}$  sich immer mehr dem Werte  $B T + C T = (B + C) T$  nähert.

## II.

## Die Schmelzkurve des Heliums.

Da SIMON sich in seinem 2<sup>en</sup>, 3<sup>en</sup> und 5<sup>en</sup> Aufsatz (l.c.) speziell mit der Schmelzkurve von *Helium* beschäftigt hat ( $12^\circ - 42^\circ$  abs.), und wir auch KEESOM<sup>1)</sup> die ersten Versuche darüber ( $1^\circ.2 - 4^\circ.2$  abs.) bei sehr niedrigen Temperaturen verdanken, so werden wir die SIMON'sche und unsere Formel im folgenden an Helium verifizieren. (Siehe Fig. 2); das

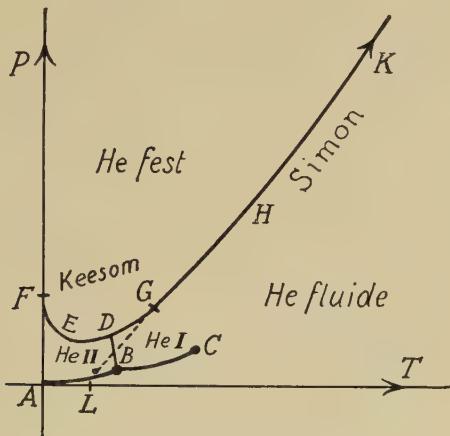


Fig. 2. (Schematisch).

$B = 2^\circ.190$ ( $p = 38.65$ mm).	$H = 12^\circ.2$ ( $827$ $\text{kg}/\text{cm}^2$ ).
$C = T_k = 5^\circ.19$ (2.26 atm.).	$K = 42^\circ.0$ (5630 " ).
$D = \pm 1^\circ.75$ (30 atm.).	$L = 2^\circ.16$ ( $T_0$ ).
$E = 1^\circ.14$ (25.3 atm.).	
$F = 0^\circ$ (54.1 atm.).	
$G = 4^\circ.22$ (140.5 atm.).	

Kurvenstück  $EG$  zwischen  $1^\circ.2$  und  $4^\circ.2$  (der Siedepunkt des  $He$ ) ist von KEESOM ( $25.3 - 140.5$  atm.), während  $HK$  (alles schematisch gezeichnet) von SIMON ist ( $827 - 5630$  atm.).

Was die KEESOM'schen Beobachtungen betrifft, so habe ich schon im Jahre 1927 für die Temperaturen oberhalb  $2^\circ$  abs., wo die feste Phase noch keine merkbare Degeneration zeigt, die Formel<sup>2)</sup>

$$p^{\text{atm}} + 16.4 = 14.54 T + 5.40 T^2$$

1) KEESOM, Versl. K. Akad. Wet. Amst. **35**, 794—803 (1926), Comm. Leiden 184<sup>b</sup>. Vlg. auch für die Dampfkurven  $AB$  ( $He\ II$ ) und  $BC$  ( $He\ I$ ) in Fig. 2 KEESOM und WOLFKE, Versl. K. Akad. Wet. Amst. **36**, 1204—1208 (1927), Comm. 190<sup>b</sup>; WOLFKE und KEESOM, Ibid. **37**, 533—539 (1928), Comm. 192<sup>a</sup>; KEESOM, S. WEBER und NORGAARD, Proceed. Ibid. **32**, 864—873 (1929), Comm. 202<sup>b</sup>; KEESOM, S. WEBER und SCHMIDT, Ibid. **32**, 1314—1323 (1929), Comm. 202<sup>c</sup>; KEESOM, Ibid. **35**, 136—143 (1932), Comm. 219<sup>a</sup>. Für die Transformationskurve  $BD$  KEESOM und CLUSIUS, Ibid. **34**, 605—609 (1931), Comm. 216<sup>b</sup>.

2) Versl. K. Akad. Wet. Amst. **36**, 311—328 (1927); Proceed. Ibid. **30**, 383—400 (1927), schon in § I zitiert. Vgl. auch **36**, 124—128 und 1083 (1927); Proceed. Ibid. **30**, 244—248 und 1203 (1927).

gefunden (l.c. S. 326). Diese Formel hat einige Ähnlichkeit mit der zwei Jahre später von SIMON gegebenen Formel ( $17 \text{ kg/cm}^2 = 16.4 \text{ atm.}$ )

$$p^{\text{kg/cm}^2} + 17 = 17.22 T^{1.5544} \quad (\log^{10} 17.22 = 1.236),$$

wo also die zwei Glieder mit  $T$  und  $T^2$  in einem einzigen Gliede mit  $T^{1.55}$  zusammen gezogen sind. Diese letztere Formel giebt die KEESEM'schen Beobachtungen zwischen  $2^\circ$  und  $4^\circ.2$  sowie die von SIMON bis wenigstens  $20^\circ$  ausgezeichnet wieder (siehe weiter unten); diejenigen zwischen  $20^\circ$  und  $42^\circ$  weniger gut.

Die KEESEM'schen Beobachtungen unterhalb  $2^\circ$  abs. werden nicht mehr durch unsere obige Formel mit  $T$  und  $T^2$ , oder durch die SIMON'sche mit  $T^{1.55}$  wiedergegeben, weil alsdann Degeneration der festen Phase eingetreten ist. Alsdann gilt theoretisch die Formel  $p^{atm} = 54.1 - 28.6 T + 58.4 T \log^{10} T$  (Kurvenstück DEF; l.c. S. 324-326 und Fig. 3), wenn nämlich das He II als eine wirkliche flüssige Phase (also nicht eine krystallinisch-flüssige Phase) betrachtet werden darf, welche *nicht* (oder nur unmerkbar wenig) degeneriert. Das von der Theorie verlangte *Minimum* würde nach obiger Gleichung bei  $1^\circ.136$  liegen ( $p = 25.26 \text{ atm.}$ ), während der Grenzwert bei  $T = 0$   $54.1 \text{ atm.}$  betragen würde ( $dp/dt = -\infty$ ).

Wir haben im Folgenden die SIMON'schen Beobachtungen einer neuen Berechnung unterzogen, weil seine Formel, wie gesagt, die Beobachtungen bei höheren Temperaturen nicht so genau wiedergibt. Nimmt man vorläufig eine Formel von der einfacheren Form  $p + a = C T^c$  an, so können  $a$ ,  $C$  und  $c$  aus je 3 Beobachtungen berechnet werden. Nach Elimination von  $a$  haben wir  $p_2 - p_1 = C(T_2^c - T_1^c)$ ;  $p_3 - p_2 = C(T_3^c - T_2^c)$ , und sodann nach Teilung  $(T_2^c - T_1^c) : (T_3^c - T_2^c) = (p_2 - p_1) : (p_3 - p_2)$ , woraus  $c$  kann berechnet werden. Die  $p$ -Werte bei  $13^\circ.0$ ,  $25^\circ.6$  und  $38^\circ.4$  ergeben  $c = 1.496$ ,  $C = 20.935$ . Und aus den Werten von  $p$  bei  $12^\circ.2$ ,  $23^\circ.1$  und  $33^\circ.0$  berechnet man  $c = 1.504$ ,  $C = 21.008$ , sodass man setzen kann  $c = 1.500$ ,  $C = 20.972$  ( $\log^{10} C = 1.32164$ ). In der nachfolgenden Tabelle sind dann die Werte von  $a$  berechnet nach der Formel

$$\log^{10}(p + a) = 1.32164 + 1.5 \log^{10} T.$$

(Die KEESEM'schen Versuche oberhalb  $2^\circ$  abs. sind mitberechnet).

Es ergiebt sich aus dieser Tabelle, dass die ursprüngliche SIMON'sche Formel mit  $c = 1.5544$  die Beobachtungen bis  $20^\circ.2$  ausgezeichnet wieder-giebt ( $a = 16$  statt 17), aber dass dieselbe bei höheren Temperaturen ungenau wird. Die  $a$ -Werte werden fortwährend höher; der totale mittelwert wird dann 27. Dabei sind die offenbar etwas ungenauen Versuche bei  $21^\circ.4$ ,  $27^\circ.9$ ,  $31^\circ.2$  und  $36^\circ.7$  abs., und die noch ungenauerer Versuche bei  $24^\circ.1$ ,  $25^\circ.8$ ,  $32^\circ.4$  und  $39^\circ.4$  ausgeschaltet. Die verbesserte Formel mit  $c = 1.5$  giebt die Versuche — mit Ausschaltung der nähmlichen 8 Versuche — zwischen  $12^\circ$  und  $42^\circ$  sehr gut wieder ( $a = 75$ ), aber weniger gut die KEESEM'schen Versuche zwischen  $2^\circ$  und  $4^\circ.2$ . Die Abweichungen  $a - 75$  sind bei den 18 übrigbleibenden SIMON'schen

TABELLE I.  
Helium  $2^{\circ} - 4^{\circ} 2$  (KEESOM) und  $12^{\circ} 0 - 42^{\circ} 0$  abs. (SIMON).

Tabs.	$p^{\text{atm.}}$	$p^{\text{kg/cm}^2}$	$\log^{10} T$	$1.5 \log^{10} T$	$\log^{10}(p+a)$	$p+a$	$a$	$a - 75 =$ $p^{\text{ber.}} - p^{\text{beob.}}$	SIMON	
									$\log^{10}(p+a) = 1.236 +$ $+ 1.5544 \log^{10} T$	$a - 27$
2.04	(35.7)	36.85	0.30963	0.46445	1.78609	61.11	24.3	—	14.3	—
2.40	(48.6)	50.2	0.38021	0.57032	1.89196	78.0	27.8	—	17.0	—
2.72	(62.8)	64.8	0.43457	0.65185	1.97349	94.1	29.3	—	16.7	—
3.12	(81.5)	84.1	0.49415	0.74123	2.06287	115.6	31.5	—	16.8	15.8
3.61	(108.8)	112.3 <sup>1</sup>	0.55751	0.83626	2.15790	143.85	31.5	33	14.3	—
4.21	(140.5)	145.0 <sup>3</sup>	0.62428	0.93642	2.25806	181.16	36.1	—	15.8	—
12.2		827	1.08636	1.62954	2.95118	894	67	— 8	14	-13
13.0		919	1.11394	1.67091	2.99255	983	64	— 11	9	-18
14.7		1106	1.16732	1.75098	3.07262	1182	76	+ 1	17	-10
15.5		1208	1.19033	1.78550	3.10714	1280	72	— 3	12	-15
16.7		1344	1.22272	1.83408	3.15572	1431	87	+ 12	26	15.7
18.1		1528	1.25768	1.88652	3.20816	1615	87	+ 12	24	-3
18.4		1580	1.26482	1.89723	3.21887	1655	75	0	12	-15
18.9		1648	1.27646	1.91469	3.23633	1723	75	0	12	-15
20.2		1826	1.30535	1.95803	3.27967	1904	78	+ 3	15	-12
20.4		1894	1.30963	1.96445	3.28609	1932	38	— 37	— 25	-52
21.1		1973	1.32428	1.98642	3.30806	2033	60	— 15	— 3	-30
(21.4)		(2050)	1.33041	1.99562	3.31726	2076	26	— 49	— 36	-63
22.7		2170	1.35603	2.03405	3.35569	2268	98	+ 23	37	+ 10
23.1		2260	1.36361	2.04542	3.36706	2328	68	— 7	8	-19
((24.1))		((2490))	1.38202	2.07303	3.39467	2481	— 9	— 84	— 68	-95
25.6		2640	1.40824	2.11236	3.43400	2716	76	+ 1	21	-6
((25.8))		((2780))	1.41162	2.11743	3.43907	2748	— 32	— 107	— 87	-114
(27.9)		(2960)	1.44560	2.16840	3.49004	3091	131	+ 56	81	+ 64
29.6		3270	1.47129	2.20694	3.52858	3377	107	+ 32	64	+ 37
(31.2)		(3530)	1.49415	2.24123	3.56287	3655	125	+ 50	88	+ 61
((32.4))		((3690))	1.51055	2.26583	3.58747	3868	178	+ 103	147	+ 120
33.0		3910	1.51851	2.27777	3.59941	3976	66	— 9	38	+ 11
(36.7)		(4540)	1.56467	2.34700	3.66864	4663	123	+ 48	117	+ 90
38.4		4910	1.58433	2.37650	3.69814	4990	80	+ 5	87	+ 60
((39.4))		((5230))	1.59550	2.39325	3.71489	5187	— 43	— 118	— 29	-56
42.0		5630	1.62325	2.43488	3.75652	5709	79	+ 4	114	+ 87
							a Mittel = 75		a Mittel = 27	

Beobachtungen zusammen — 90 bei 9 Temperaturen (2 mal = 0), und + 93 bei 9 anderen Temperaturen; im Mittel also  $\pm 10$ . Bei der ursprünglichen SIMON'sche Formel sind die Abweichungen  $a - 27 = -209$  bei 13 Temperaturen, und + 205 bei nur 5 Temperaturen; also im Mittel — 16 und + 21, d. h. doppelt so gross und viel unregelmässiger. (Mit  $a = 17$  würde man für  $a - 17$  sogar — 387 und + 641 erhalten haben!).

Wir wollen noch bemerken, dass die grössten Abweichungen, sogar bei den 8 ausgeschalteten Temperaturen, in Wirklichkeit nicht so gross sind, wenn man dieselben nicht auf die Drucke, sondern auf die *Temperatur*en bezieht. So bezieht sich z.B. die Druckabweichung — 118 bei  $39^{\circ}.4$  auf einen Totaldruck von  $5230 \text{ kg/cm}^2$ , was dort eine Temperaturdifferenz von  $118/400 \times 2.6 = 0^{\circ}.8$  ergeben würde; d.h. der beobachtete Druck 5230 ist um 118 Einheiten zu hoch und würde mit einer um  $0^{\circ}.8$  höheren Temperatur übereinstimmen.

Tabelle II ist berechnet für den Fall, dass  $B$  nicht = 0, wie in der SIMON'schen Formel, sondern z.B. = 10 ist. (wahrscheinlich ist  $B$  noch höher).

Statt  $p$  hat man dann nur überall  $p - 10 T$  zu setzen, und man kann aus den nähmlichen 2 Reihen von je 3 Beobachtungen ebenso wie oben berechnen  $1 + \varepsilon = 1.546$ , bzw. 1.555, im Mittel  $1 + \varepsilon = 1.550$ . Und weiter  $C = 16.077$ , bzw. 16.175, im Mittel  $C = 16.126$  ( $\log^{10} C = 1.20753$ ). Die Werte von  $a$  sind alsdann berechnet nach der Formel

$$\underline{\log^{10}(p - 10T + a) = 1.20753 + 1.55 \log^{10} T.}$$

Wie man sieht, ist die Uebereinstimmung gleich gut wie mit der Formel ohne  $BT$ . Die Grösse  $a$  bleibt 75. Die negativen Abweichungen  $a - 75$  betragen zusammen — 89 bei 8 Beobachtungen (1 mal 0), die positiven + 92 bei 10 Beobachtungen; im Mittel also — 11 und + 9, identisch mit dem Vorhergehenden (— 10 und + 10). Die KEESEM'schen Versuche werden auch hier weniger gut wiedergegeben, sei es auch, dass der Mittelwert 33 bei den drei höchsten Temperaturen jetzt 43 geworden ist, was schon etwas näher an 75 kommt.

Das Resultat ist nun folgendes.

- a. Ursprüngliche SIMON'sche Formel:  $p + 17 = 17.22 T^{1.5544}$ .  
Nur genau zwischen  $2^{\circ}$  und  $4^{\circ}.2$  und  $12^{\circ}$ — $20^{\circ}$  ( $a = 16$  statt 17); besser  $a = 27$  ( $T = 12^{\circ}$ — $42^{\circ}$ ).
- b. Verbesserte SIMON'sche Formel:  $p + 75 = 20.972 T^{1.5}$ .  
 $T = 12^{\circ}$ — $42^{\circ}$ ; viel geringere Abweichungen.
- c. Unsere Formel mit 10  $T$ :  $p - 10 T + 75 = 16.126 T^{1.55}$ .  
 $T = 12^{\circ}$ — $42^{\circ}$ ; Uebereinstimmung gleich gut wie b.

Merkwürdigerweise ist jetzt das zweite Glied fast identisch mit der ursprünglichen SIMON'schen Formel; nur ist  $p + 17$  (oder  $p + 27$ ) ersetzt

TABELLE II.

$T^{abs.}$	$p - 10 T$	$1.55 \log_{10} T$	$\log_{10} (p - 10 T + a)$	$p - 10 T + a$	$a$	$a - 75$
2.04	16.5	0.47993	1.68746	48.7	32.2	—
2.40	26.17	0.58933	1.79686	62.6 <sup>4</sup>	36.5	—
2.72	37.6 <sup>3</sup>	0.67358	1.88111	76.0 <sup>5</sup>	38.4	—
3.12	52.9 <sup>3</sup>	0.76594	1.97347	94.0 <sup>7</sup>	41.1	—
3.61	76.2	0.86414	2.07167	117.9	41.7	43
4.21	102.9	0.96763	2.17516	149.7	46.8	—
12.2	705	1.68386	2.98139	780	75	0
13.0	789	1.72661	2.93414	859	70	— 5
14.7	959	1.80935	3.01688	1040	81	+ 6
15.5	1053	1.84502	3.05255	1129	76	+ 1
16.7	1177	1.89522	3.10275	1267	90	+ 15
18.1	1347	1.94940	3.15693	1435	88	+ 13
18.4	1396	1.96047	3.16800	1472	76	+ 1
18.9	1459	1.97851	3.18604	1535	76	+ 1
20.2	1624	2.02330	3.23083	1702	78	+ 3
20.4	1690	2.02993	3.23746	1728	38	— 37
21.1	1762	2.05263	3.26016	1820	58	— 17
(21.4)	(1836)	2.06214	3.26967	1861	25	— 50
22.7	1943	2.10185	3.30938	2039	96	+ 21
23.1	2029	2.11360	3.32113	2095	66	— 9
((24.1))	((2249))	2.14213	3.34966	2237	— 12	— 87
25.6	2384	2.18277	3.39030	2456	72	— 3
((25.8))	((2522))	2.18801	3.39554	2486	— 36	— 111
(27.9)	(2681)	2.24068	3.44821	2807	126	+ 51
29.6	2974	2.28050	3.48803	3076	102	+ 27
(31.2)	(3218)	2.31594	3.52347	3338	120	+ 45
((32.4))	((3366))	2.34136	3.54889	3539	173	+ 98
33.0	3580	2.35370	3.56123	3641	61	— 14
(36.7)	(4173)	2.42523	3.63276	4293	120	+ 45
38.4	4526	2.45572	3.66325	4605	79	+ 4
((39.4))	((4836))	2.47303	3.68056	4792	— 44	— 119
42.0	5210	2.51604	3.72357	5291	71	— 4

 $a$  Mittel = 75

durch  $p - 10 T + 75$  was (wenigstens zwischen  $12^\circ$  und  $42^\circ$ ) viel bessere Resultate giebt, und dabei auch theoretisch mehr begründet ist (siehe § I).

## III.

Berechnung von  $L$  und  $\Delta v$ .

Erst wollen wir die Werte von  $\frac{dp}{dt}$  berechnen für die drei Temperaturen, wobei SIMON (§ I, l.c.) die Werte von  $L$  und  $v_2$  bestimmt hat. Aus c. (siehe oben) geht hervor:

$$\frac{dp}{dt} = 10 + 1.55 \times 16.126 T^{0.55} = 10 + 25.00 T^{0.55}.$$

Nun ist bei  $14^\circ.9$ ,  $17^\circ$  und  $20^\circ.4$   $T^{0.55} = 4.4183$ ,  $4.7506$  und  $5.2518$ , also

$$\frac{dp}{dt} = 120.4, 128.7 \text{ und } 141.3.$$

Aus  $\Delta v = L : T \frac{dp}{dt}$  folgt dann weiter  $\Delta v = L_1 : 1795$ ,  $L_2 : 2189$  und  $L_3 : 2882$ . Und somit mit  $p = 1136$ ,  $1398$  und  $1857$  (berechnet aus c.):

$$\begin{aligned} p \Delta v &= 0.6329 L_1, 0.6341 L_2, 0.6443 L_3, \\ \lambda &= L - p \Delta v = 0.3671 L_1, 0.3659 L_2, 0.3557 L_3. \end{aligned}$$

Die äussere Arbeit  $p \Delta v$  beträgt also bei den genannten Temperaturen fast *zwei drittel* der *totalen Schmelzwärme*, sodass für die *innere Schmelzwärme*  $\lambda$  nur  $\frac{1}{3}$  übrigbleibt!

Für  $\theta = \frac{\lambda}{\Delta v} = \frac{L}{\Delta v} - p = T \frac{dp}{dt} - p$  wird nun gefunden:

$$\theta = 1795 - 1136 = 659; 2189 - 1398 = 791; 2882 - 1857 = 1025.$$

Wir wollen dieses Resultat an der Beziehung  $\theta = \theta'_0 - \gamma T + \epsilon p$  (siehe Gleichung (2) von § I) verifizieren. Aus  $\theta'_0 = \theta + \gamma T - \epsilon p$  folgt nämlich mit  $\epsilon = 0.55$ ,  $\gamma = 5.5$  (da  $B = \gamma/\epsilon$  ist und  $B = 10$  angenommen wurde):

$\theta'_0 = 659 + 82 - 625 = 116$ ;  $791 + 94 - 769 = 116$ ;  $1025 + 112 - 1021 = 116$ , sodass  $\theta'_0$  bei allen drei Temperaturen gehörig den näherlichen Wert, und zwar 116, ergiebt, in völliger Uebereinstimmung mit der Beziehung  $a = \theta'_0 : (1 + \epsilon)$  (siehe (δ) von § I), welche ebenfalls ( $a = 75$ )  $\theta'_0 = 75 \times 1.55 = 116$  ergiebt. Da  $\theta_0 = \frac{\lambda_0}{\Delta v_0}$  nach (γ) von § I  $= \theta'_0 - \gamma T_0$  ist, wo  $T_0$  der Wert von  $T$  ist, wo die verlängerte Schmelzkurve *HK* die  $T$ -Achse in  $L$  schneidet, und dafür aus c. mit  $p = 0$  der Wert  $T_0 = 2^\circ.164$  berechnet wird, so wird  $\theta_0 = 116 - 5.5 \times 2.164 = 116 - 12 = 104$ . Bei  $T_0$  und bei den drei genannten Temperaturen hat man also für  $\theta = \lambda/\Delta v$  (siehe oben):

$$\theta_0 = 104 (2^\circ.2) \mid \theta = 659 (14^\circ.9) \quad ; \quad \theta = 791 (17^\circ) \quad ; \quad \theta = 1025 (20^\circ.4).$$

Nun fand SIMON (l.c.) für  $L$  die Werte 24, 40 und  $37 \text{ gr. } \text{kal} / \text{gr. } \text{at}$  (Unsicherheit etwa  $10\%$ ). Wir werden jetzt zeigen, dass der Wert bei

14°.9, nämlich 24, *unmöglich richtig* sein kann, da alsdann notwendig ein abrupte Biegung in der Schmelzkurve gleich unterhalb 17° vorhanden sein müsste, welcher in Wirklichkeit nicht existiert, da die oben berechneten Werte für  $\theta = 1/\Delta v$  einen ganz regelmässigen Verlauf zeigen, und alle drei (siehe oben) den näherlichen Wert 116 für  $\theta'_0$  ergeben.  $\theta$  ist bei 14°.9 nur sehr wenig kleiner als bei 17° (659 gegen 791), so dass der Wert 24 für  $L$  bei 14°.9 wohl auf einen Versuchsfehler beruht. Vielmehr soll, wie wir sehen werden,  $L = 42$  sein müssen (wo die zwei Ziffern 42 umgekehrt zufällig 24 ergeben). Der Verlauf von  $L$  wird bei

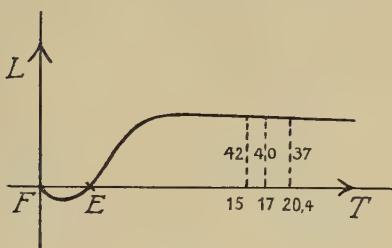


Fig. 3

*He* durch Fig. 3 dargestellt. Bei  $F(T=0)$  und bei  $E$  (Fig. 2 in § II) ist  $L=0$ ; bei  $F$  weil bei  $T=0$  in  $L=T(s_2-s_1)$   $s_2-s_1$  jedenfalls endlich bleibt; und bei  $E$ , weil beim Minimum  $\frac{dp}{dt}=0$  ist, und  $T$  und  $\Delta v$  endlich sind.

Um die Werte von  $L$  in normalen Einheiten auszudrucken (jedoch mit  $p$

in  $\text{kg/cm}^2$  statt in atm.), muss durch  $542.7 : 1.0332 = 525.3$  geteilt werden ( $542.7 = 273.09 \times 1.987$ ). Das ergibt für die zwei höchsten Temperaturen  $L = 0.07615$ , bzw.  $0.07044$ . Und hieraus, da (siehe oben)  $\Delta v = L : 2189$ , bzw. 2882 ist:  $\Delta v = 0.04348$ , bzw.  $0.04244$ . Diese Werte stehen also fest, wenn  $L = 40$  und 37 richtig sind.

Die Werte von  $v_2$  können aus  $v_2 = 4 : (D_2 \times 22416)$  gefunden werden. Mit  $D_2$  (fluides *He*) = 0.31, 0.32 und 0.35<sup>5</sup> (Genauigkeit  $\pm 3\%$ ), oder etwas ausgeglichen 0.31, 0.32<sup>5</sup> und 0.35, berechnet man nun folgendes:

$T = 14^{\circ}9$	17°	20°4
$v_2 = 0.035756$	0.035490	0.035098
$\Delta v = (0.04450)$	0.04348	0.04244
$v_1 = (0.035306) \uparrow$	$0.035142 \leftarrow$	0.034854

Aus  $v_1 = 0.035142$  haben wir durch Extrapolation ( $v_1 = f(p)$ ) bei 14°.9 den wahrscheinlichsten Wert  $v_1 = 0.035306$  berechnet, woraus dann weiter mit  $v_2 = 0.035756$   $\Delta v = 0.04450$  folgt. Und dann wird  $L = 0.04450 \times 1795$  ( $\Delta v = L_1 : 1795$ , siehe oben), d.h.  $L = 0.08078$  in normalen Einheiten, oder = 42.4 in  $\text{gr.kal}/\text{gr.at}$ . Die plötzliche Erniedrigung des  $L$ -Wertes (siehe Fig. 3) tritt erst bei viel niedrigeren Temperaturen ein, wahrscheinlich erst im durch KEESEN bearbeiteten Temperaturgebiet (2°—4°.2). (Das Minimum von  $p$  bei  $E$ , wo  $L=0$  ist, liegt bei etwa 1°.1; siehe § II).

Tavel sur Clarens (Schweiz), 1932.

**Physics. — Investigations about the ionising effect of  $\alpha$ -rays in solid dielectrics.** By HERMINE FOLMER. (Communicated by Prof. H. HAGA.)

(Communicated at the meeting of May 28, 1932.)

In a previous number of the proceedings<sup>1)</sup> I published some experiments made by me on this subject. I then already pointed out one of the difficulties of such an investigation, viz.: that the presence of air in the system can influence the measurement unfavourably. For that experiment a thin layer of solid paraffin (approximately 0.2 mm. thick) was placed between metallic electrodes in an electric field (upper electrode at + 80 volts), the lower electrode being connected with an electrometer. A current was generated, first strong, then weaker in consequence of an increasing polarisation tension, until it had almost reached the state called: "Reststrom" (residual current) which appears about six hours after application of the electric field. After this the paraffin was put under  $\alpha$  radiation from a plate coated with polonium mounted right over it, the radiation of which penetrating the thin upper electrode might bring about an ionising effect in the paraffin, which might become apparent in the strength of the current. An increase of current appeared indeed, but this effect need not be a real ionisation in the paraffin, but might be accounted for by the ionisation of air-bubbles that had been formed notwithstanding great precautions under the upper electrode (Al. leaf about 7  $\mu$ . thick); the tension absent in those places on the paraffin would then suddenly be supplied thus causing an apparent effect<sup>2)</sup>. Though one might perhaps be able to explain some particular phenomena in such an experiment from real ionisation in the paraffin, this could only be done by assuming processes in the paraffin that are still very doubtful<sup>3)</sup>.

In a second investigation an attempt was made to find the ionising effect in paraffin in yet another way, viz. by means of an experiment in which an electric field was again applied, but especially with this difference, that the *Po* radiation on the paraffin takes place *before* the application of the electric field, in order thus to avoid the difficulty of the air-bubbles. The course of the experiment is as follows: every morning during a series of days the electric field is applied, while alternately the one night before the layer of paraffin had been exposed to *Po* radiation, whereas the next night this did not take place; in the case of previous radiation the paraffin, supposed to be ionised by  $\alpha$  radiation will ionise increasingly until an

<sup>1)</sup> Proc. Vol. 32, No. 6, 1929.

<sup>2)</sup> I.c. pp. 6, 7.

<sup>3)</sup> I.c. pp. 8, 9.

equilibrium is reached, at which moment as many ions arise per second as recombine in that same time. The time required for this process will be longer in solid substances than in gases in consequence of the slight mobility of ions, which causes a considerable retardation in the recombination of these ions in the absence of an electric field. This will also be the cause of the fact, that, if the *Po* plate is removed the next morning the ionisation will not disappear so rapidly as in a gas, but continues to exist for some time, owing to the slow recombination of these once formed ions. If, however, after removal of the *Po* plate in the morning an electric field is applied (upper electrode at + 80 volts), as was done in this experiment, these ions might influence the electric current that appears: the latter might be stronger as compared with the current values obtained on the days with non previous *Po* radiation; the difference in effect would then be measured by comparing the current values of both cases at definite moments after application of the field and that after e.g. half a minute, three minutes, half an hour, one hour, one hour and a half. These measurements are taken in the forenoon, after which both metallic electrodes are earthed till the next morning, when the electric field is again applied after previous radiation or non radiation etc. etc.

There are two great advantages in this new method: in the first place the chance that a possibly present air-bubble exerts any influence is entirely out of the question<sup>1)</sup>; for the ions in this air caused by  $\alpha$  radiation, have already for the greater part recombined before the application of the electric field in the morning, which was only done some minutes after the removal of the *Po* plate. In order to annihilate the influence of any still remaining air-ionisation the paraffin, on the days following upon the nights of non radiation, is first radiated for a few minutes with the *Po* rays, then the *Po* plate is removed and only then the electric field applied after a moment's interval. By this course the conditions in the cases of previous non radiation and radiation have as far as possible been made the same with respect to the influence of air. The second advantage is that the influence of the *Po* radiation is examined not as was done in the former method, only when the "Reststrom" has almost been reached, but as moments closer to the time of application of the electric field, when the polarisation is still increasing and consequently the active electric field still strong, which is of great advantage with respect to the amount of the difference of effect that is sought.

Numberless experiments were thus made<sup>2)</sup>; only part of these measurements could be used for calculation, because often the experiment had to

<sup>1)</sup> The same may be said of air-holes in the paraffin near the upper surface, which might be present in the paraffin layer notwithstanding previous heating of the paraffin in vacuum; these might also cause disturbances in the former method in consequence of ionisation by  $\alpha$ -rays. Not too much care can be taken with respect to air-influence in these investigations.

<sup>2)</sup> The string electrometer of WULF was used: the potentialsensitiveness = 45 scale divisions per volt.

be broken off on account of some disturbance, though for only a few days the same layer of paraffin had been used, a.o. frequently because suddenly an air-bubble would appear under the aluminium.

As one out of some examples of a similar experiment made under very favourable circumstances may be mentioned a series of experiments made with one and the same layer of paraffin, subdivided into two series, which were made with an interval of about one month; they gave the following outcome:

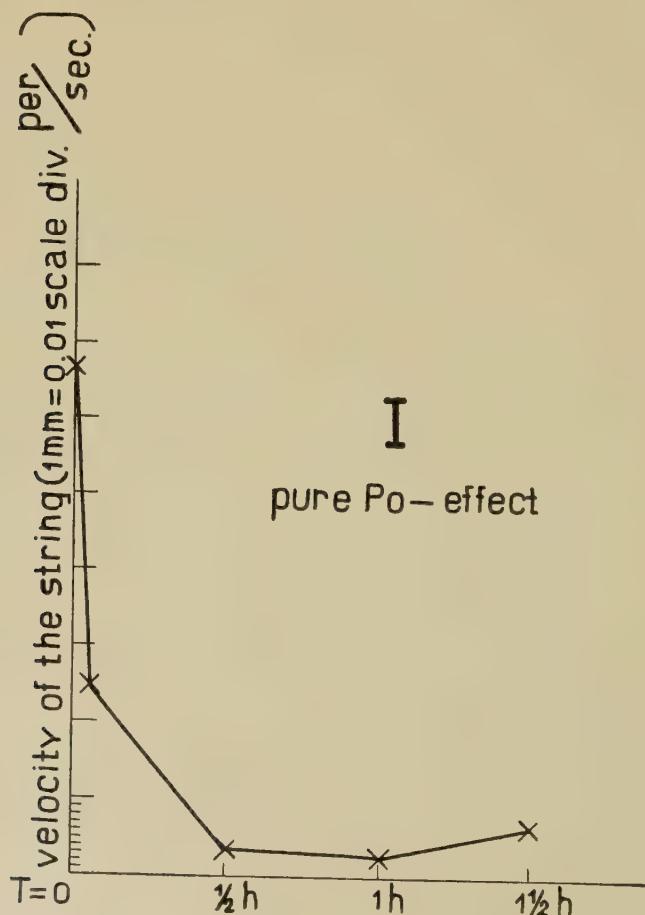
1st series of 11 days, 6 days with previous radiation.

5 days with non previous radiation.

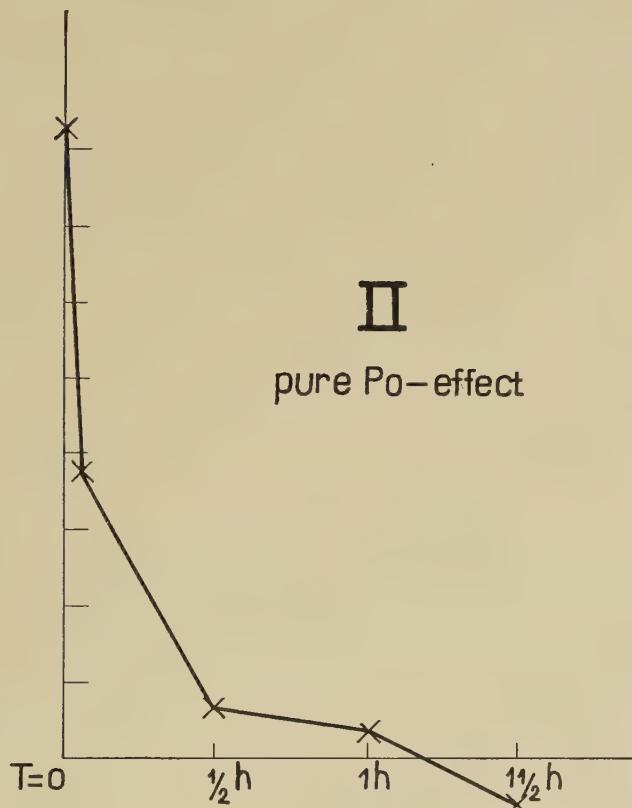
2nd series of 6 days, 3 days with previous radiation.

3 days with non previous radiation.

The velocity of the string was measured each morning at the moments as indicated above, after application of the electric field; on the days of non previous radiation the mean string velocity at those moments is a measure of the current in consequence of the natural conductivity of the



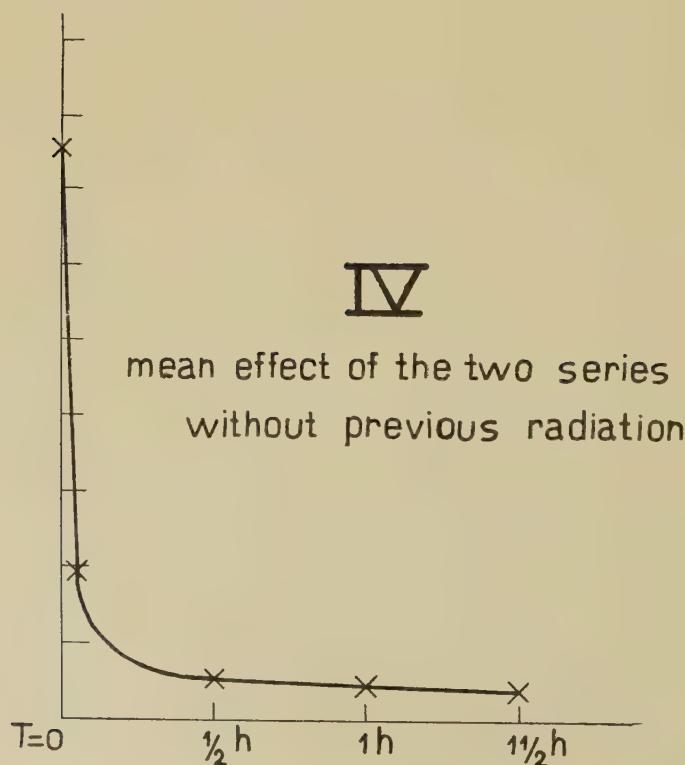
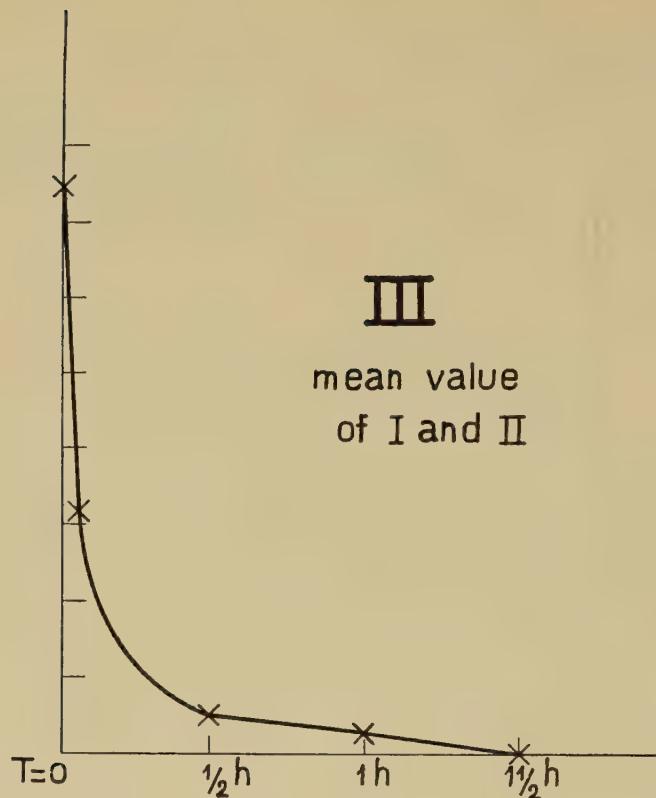
paraffin, whereas on the mornings after previous radiation this is a measure of the sum of this current and the one that is the result of the *Po* effect. The difference of the two mean velocities is therefore a measure of the current as a result of the pure *Po* effect, which finds its expression in curves I and II of the two series. As the natural conductivity increases with



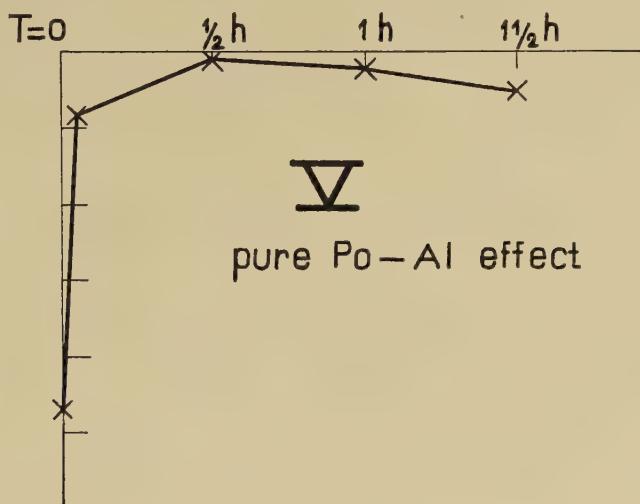
the increase of temperature, the mean of the temperatures at the moments of observation on days with previous radiation should not be higher as compared with that on days of non radiation, so that the course of temperature considered as a factor by itself could not be the cause of an apparent *Po* effect. The mean of the temperatures in the first series was for both kinds of days the same, but in the second series proved to be  $0.5^{\circ}$  lower on days with previous radiation.

In curve III the mean *Po* effect of the two series has been expressed; the sharply decreasing course of this curve takes place, because the polarisation increases so rapidly, especially in the beginning, after the application of an electric field and in accordance with this the field then weakens considerably.

Curve IV shows (reduced) the mean string velocity for the days with non previous radiation; in order to equate the initial ordinate of IV with that of III all the ordinate values had to be reduced 18.3 times.



The meaning of curve V is as follows: its purpose was to examine if the *Po* film might contain some admixtures of substances like *Ra D* and *Ra R* etc., and that as many that instead of the  $\alpha$ -rays of *Po* the more penetrating rays of these elements might be made responsible



for the effect obtained (on the strength of other experiments a similar supposition has as good as been rejected). The experiment was as follows: the above described comparative experiments were again made, however, with these changes that in the case of previous radiation the *Po* plate was not immediately placed over the paraffin, but with the interposition of aluminium, thus making the thickness with the foil that served as an upper electrode of the paraffin, 24 microns, just sufficient to absorb the  $\alpha$  particles of *Po*. With respect to the more penetrating radiation of the admixtures the condition then grew to be such that if they had caused the *Po* effect their influence would only be somewhat diminished by the interposed aluminium; the *Po* effect would therefore not disappear, but only be reduced a little in force. Curve V, however, happens always to show negative values at the various moments instead of positive. This experiment was made with the same layer of paraffin as that of the above-mentioned *Po* experiment and was made between the two series. The observations extended over twelve days, with six days of previous radiation.

The above given curves show quite clearly the existence of a *Po* effect; i.e. that a previous  $\alpha$  radiation influences positively the electric conductivity of paraffin. In my opinion this brings forward the great probability that  $\alpha$ -rays cause ionisation in a *solid* dielectric, viz. in *solid* paraffin.

Yet the possibility is not excluded that the upper surface of the paraffin is changed in such a way by the previous radiation from  $\alpha$  particles, that this might influence on application of the electric field the next morning the formation of free charges near the upper surface of the paraffin: on those

days then the polarisation tension might be different from that on the days of non previous radiation ; this would also give difference in the strength of current. This possibility will be still further investigated into.

Herewith I feel obliged to give a vote of thanks to Prof. Dr. D. COSTER for the resources he put at my disposal for this research work and especially for the fine working facilities his laboratory afforded me.

*Groningen, Natuurkundig Laboratorium  
der Rijks-Universiteit.*

---

**Mathematics.** — *Zum Unifizierungsproblem der Physik. Skizze einer generellen Feldtheorie.* Von J. A. SCHOUTEN und D. VAN DANTZIG. (Communicated by Prof. P. EHRENFEST).

(Communicated at the meeting of April 30, 1932.)

*Einleitung.*

In einer früheren Arbeit<sup>1)</sup> haben wir gezeigt, dass sich die neue EINSTEIN-MAYERSche Theorie<sup>2)</sup> in welcher jedem Punkte der Raum-Zeitwelt eine lokale  $R_5$  zugeordnet wird, vollständig durch eine rein vierdimensionale projektive Theorie ersetzen lässt in welcher nur lokale  $R_4$  auftreten, die durch die Uebertragung nicht mehr affin sondern projektiv auf einander abgebildet werden. Wir haben dort schon darauf hingewiesen, dass die so modifizierte Theorie aufs engste verwandt ist mit einer von VEBLEN und HOFFMANN<sup>3)</sup> herrührenden Theorie, die von beliebigen in den lokalen Mannigfaltigkeiten liegenden quadratischen Hyperflächen ausgeht. VEBLEN und HOFFMANN haben dabei von vornherein vorausgesetzt, dass der durch das Feld der lokalen Hyperflächen bestimmte Zusammenhang symmetrisch ist, während die projektivisierte EINSTEIN-MAYERSche Theorie durch eine ganz andere Forderung, nämlich die der Existenz eines gewöhnlichen kovarianten Differentials, ausgezeichnet ist.

In der vorliegenden Arbeit wollen wir von diesen beiden einschränkenden Forderungen absehen, und zunächst ganz allgemein den zu einem Feld von lokalen quadratischen Hyperflächen gehörigen projektiven Zusammenhang bestimmen. Sodann werden drei geometrische und fünf physikalische Forderungen gestellt: Letztere lauten:

<sup>1)</sup> J. A. SCHOUTEN und D. VAN DANTZIG, Ueber eine vierdimensionale Deutung der neuesten Feldtheorie, Proc. Kon. Akad. v. Wet. **34** (1931) 1298—1407.

<sup>2)</sup> A. EINSTEIN und W. MAYER, Einheitliche Theorie von Gravitation und Elektrizität, Sitzungsber. Berl. Akad. **25** (1931) 541—557.

<sup>3)</sup> O. VEBLEN, A generalisation of the quadratic differential form, Quart. Jn. of Math. **1** (1930) 60—76; O. VEBLEN and B. HOFFMANN, Projective relativity, Physical Review **36** (1931) 810—822; B. HOFFMANN, Projective relativity and the quantum field, Phys. Review **37** (1931) 88—89. Man vergleiche auch die sehr verwandten Arbeiten von D. J. STRUIK und N. WIENER, Sur la théorie relativiste des quanta, C. R. **185** (1927) 42—44; A relativistic theory of quanta, Journ. of Math. and Phys. **8** (1927).

1. Die geodätischen Linien sind die Weltlinien geladener Massenteilchen.
2. In einem reinen Gravitationsfelde ist die Uebertragung der Vektoren die aus der gewöhnlichen Relativitätstheorie bekannte RIEMANNSche Uebertragung.
3. Die einfachste sich unmittelbar darbietende lineare  $\psi$ -Gleichung ist identisch mit der Diracschen Gleichung.
4. Der totale Impulsenergiepunkt (der in der projektiven Theorie an Stelle des Impulsenergievektors tritt) ist längs einer Weltlinie kovariant konstant.
5. Variation der einfachsten sich unmittelbar darbietenden Invariante ergibt die kombinierten Feldgleichungen von Gravitation und Elektromagnetismus.

Durch diese Forderungen ist nun *ein einziger* projektiver Zusammenhang ausgezeichnet der sich sowohl von der projektivisierten EINSTEIN-MAYERschen Theorie als von der VEBLEN-HOFFMANNschen Theorie unterscheidet. Im Gegensatz zur zweiten Theorie gibt die neue Theorie die Konstanz des totalen Impulsenergiepunktes, im Gegensatz zu *beiden* Theorien die zwangsläufige Entstehung der Wellengleichung aus der einfachsten sich darbietenden linearen  $\psi$ -Gleichung.

Wir verwenden die von D. VAN DANTZIG eingeführte Methode der homogenen Koordinaten, die sich für Untersuchungen dieser Art als besonders praktisch bewährt hat<sup>1)</sup>.

### § 1. Hauptbegriffe der projektiven Differentialgeometrie.

Es seien  $x^\nu$  ( $\nu, \kappa, \dots, \omega = 0, 1, 2, 3, 4$ ) homogene Koordinaten der Raum-Zeitwelt. Sie seien der Gruppe  $\mathfrak{H}_5$  aller *homogenen Koordinatentransformationen ersten Grades*<sup>2)</sup> unterworfen:

$$x^{\nu'} = x^{\nu'} (x^0, x^1, x^2, x^3, x^4); \quad \nu', \kappa', \dots, \omega' = 0', 1', 2', 3', 4'. \quad \dots \quad (1)$$

Daneben betrachten wir die Gruppe  $\mathfrak{F}$  aller *Punkttransformationen* von der Form

$$\bar{x}^\nu = \varrho x^\nu, \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (2)$$

wo  $\varrho$  irgend eine homogene Funktion nullten Grades der  $x^\nu$  darstellt. Wir verwenden folgende projektivgeometrische Objekte:

1. Skalare  $r$ -ten Grades: diese sind invariant bei  $\mathfrak{H}_5$  und bekommen einen Faktor  $\varrho^r$  bei  $\mathfrak{F}$ .

<sup>1)</sup> D. VAN DANTZIG, Theorie des projektiven Zusammenhangs  $n$ -dimensionaler Räume, Math. Ann. 106 (1932) 400—454 weiter zitiert als T. P. Z. Die Einordnung der Affingeometrie in die projektive, die mit unserem Gegenstand eng zusammenhängt findet sich in der Arbeit desselben Verfassers: Zur allgemeinen projektiven Differentialgeometrie, I. Einordnung der Affingeometrie, Proc. Kon. Akad. v. Wet. 1932, 524—534, weiter zitiert als A. P. D. I.

<sup>2)</sup> Nicht notwendig linearen!

2. Kontra- und kovariante Punkte  $r$ -ten Grades mit der Transformationsweise

$$\left. \begin{aligned} v^\nu &= \mathcal{N}_\nu^\nu v^\nu; \quad \mathcal{N}_\nu^\nu = \overset{*}{\partial}_\nu x^\nu; \quad \overset{*}{\partial}_\nu = \frac{\partial}{\partial x^\nu}; \quad \bar{v}^\nu = \varrho^r v^\nu \quad (a) \\ w_\lambda &= \mathcal{N}_\lambda^\lambda w_\lambda; \quad \mathcal{N}_\lambda^\lambda = \overset{*}{\partial}_\lambda x^\lambda; \quad \overset{*}{\partial}_\lambda = \frac{\partial}{\partial x^\lambda}; \quad \bar{w}_\lambda = \varrho^r w_\lambda \quad (b) \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (3)$$

3. Projektoren höherer Valenz (= Anzahl der Indizes), die sich aus den Punkten ableiten wie Affinoren aus den Vektoren.

4. Allgemeinere (projektive) geometrische Objekte, die sich bei  $\mathfrak{H}_5$  und  $\mathfrak{F}$  irgendwie transformieren.

Diese Objekte liegen in der zu jedem Punkte der Raumzeitwelt gehörigen lokalen  $E_4^*$ <sup>2)</sup>. Infolge der Eulerschen Homogenitätsbedingungen

$$x^\nu = x^\lambda \overset{*}{\partial}_\lambda x^\nu = \mathcal{N}_\nu^\nu x^\nu. \quad \dots \quad (4)$$

sind die  $x^\nu$  selbst Bestimmungszahlen eines Punktes, des *Berührungs punktes* der  $E_4^*$ . Dagegen sind die  $dx^\nu$  nicht Bestimmungszahlen eines kontravarianten Punktes, da sie sich zwar bei  $\mathfrak{H}_5$  richtig aber bei  $\mathfrak{F}$  falsch transformieren. Die  $\mathcal{N}_\nu^\nu$  sind *intermediäre*<sup>3)</sup> Bestimmungszahlen des Einheitsprojektors:

$$\mathcal{N}_\nu^\nu = \overset{*}{\partial}_\lambda x^\nu = \begin{cases} 1 & \dots \\ 0 & \dots \end{cases} \quad (5)$$

Der *Exzess*  $\varepsilon$  eines Projektors der kontra- bzw. kovarianten Valenz  $t$  bzw.  $s$ , dessen holonome Bestimmungszahlen den Grad  $r$  haben ist

$$\varepsilon = r - t + s \quad \dots \quad (6)$$

Irgendwelche vier unabhängige homogene Funktionen nullten Grades  $\xi^k$  ( $k, \dots, m = 1, 2, 3, 4$ ) der  $x^\nu$  lassen sich als gewöhnliche („inhomogene“) Koordinaten der Raumzeitwelt verwenden. Sie seien unabhängig von den Transformationen der  $x^\nu$  den Transformationen der Gruppe  $\mathfrak{G}_4$  aller kontinuierlichen Transformationen unterzogen. Ausgehend von  $\mathfrak{G}_4$  werden wie üblich (affine) Skalare, Vektoren, Affinoren und allgemeinere (affine) geometrische Objekte in den lokalen  $E_4^*$ <sup>4)</sup> definiert. Projektive Skalare vom Grade Null lassen sich mit affinen Skalaren identifizieren. Die Beziehungen zwischen Projektoren und Affinoren sind folgende. Jedem kontravarianten Punkt ersten Grades ist in *eindeutiger Weise* ein kontravarianter Vektor zugeordnet, jedem kovarianten Vektor aber in *einein-*

<sup>1)</sup> Wir verwenden das Zeichen  $\overset{*}{=}$  wenn die linke oder rechte Seite einer Gleichung ein nicht verschwindender Projektor ist und die Gleichung nicht bei allen holonomen oder anholonomen Transformationen der Bezugssysteme (und zwar für jeden einzelnen Index für sich) invariant ist.

<sup>2)</sup>  $E_n^*$  =  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit mit einer gewöhnlichen projektiven Geometrie.

<sup>3)</sup> D. h. Bestimmungszahlen in Bezug auf mehrere Bezugssysteme zugleich.

<sup>4)</sup>  $E_n$  =  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit mit einer gewöhnlichen affinen Geometrie.

deutiger Weise ein kovarianter Punkt für den die Ueberschiebung mit  $x^\nu$  verschwindet:

$$\left. \begin{array}{l} 'v^k = E_\nu^k v^\nu; \quad E_\lambda^k \stackrel{*}{=} \partial_\lambda \xi^k \quad (a) \\ 'w_\lambda = E_\lambda^i w_i; \quad x^\lambda w_\lambda = 0 \quad (b) \end{array} \right\} \dots \dots \dots \quad (7)$$

Ist ein kovariantes Punktfeld  $t_\lambda$  gegeben mit der Normierungsbedingung

$$t_\lambda x^\lambda = 1 \dots \dots \dots \dots \quad (8)$$

so lässt sich mit Hilfe des Projektors

$$E_\lambda^\nu = \mathcal{N}_\lambda^\nu - t_\lambda x^\nu \dots \dots \dots \dots \quad (9)$$

auch eine eineindeutige Korrespondenz herstellen zwischen allen kontravarianten Vektoren und denjenigen kontravarianten Punkten, die bei Ueberschiebung mit  $t_\lambda$  annuliert werden. Durch die Gleichungen

$$E_\lambda^j E_j^\nu = E_\lambda^\nu \dots \dots \dots \dots \dots \quad (10)$$

$$t_\nu E_j^\nu = 0 \dots \dots \dots \dots \dots \quad (11)$$

sind nämlich die  $n(n+1) E_j^\nu$  eindeutig bestimmt. Sie genügen der Gleichung

$$E_\mu^k E_i^\mu = A_i^k; \quad A_i^k \stackrel{*}{=} \partial_i \xi^k = \begin{cases} 1 & ; \quad \partial_i \stackrel{*}{=} \frac{\partial}{\partial \xi^i}, \dots \\ 0 & \end{cases} \quad (12)$$

und führen die gewünschte Korrespondenz herbei. Wir identifizieren von jetzt an diejenigen Projektoren die bei jeder Ueberschiebung mit  $t_\nu$  oder  $x^\nu$  verschwinden mit den korrespondierenden Affinoren und schreiben beide mit demselben Kernbuchstaben. Die  $E_\lambda^k$ ,  $E_k^\nu$  und  $E_\lambda^\nu$  werden dann Bestimmungszahlen des Einheitsaffinors  $A_i^k$  und folgerichtig mit dem Kernbuchstaben  $A$  geschrieben, sodass die Korrespondenzformeln für Vektoren jetzt lauten

$$v^k = A_\nu^k v^\nu \text{ für } v^\nu t_\nu = 0; \quad v^\nu = A_k^\nu v^k; \quad \dots \dots \quad (13)$$

$$w_i = A_i^\lambda w_\lambda \text{ für } w_\lambda x^\lambda = 0; \quad w_\lambda = A_\lambda^i w_i \quad \dots \dots \quad (14)$$

Statt der  $\mathcal{N}_\nu^\nu$  aus (3) kann man  $(n+1)^2$  ganz beliebige Funktionen  $\mathcal{N}_\nu^\nu$  von irgendwelchem Grade  $q$  mit nichtverschwindender Determinante einführen und die  $v^\nu, w_\nu$  aus (3), berechnet mit diesen neuen  $\mathcal{N}_\nu^\nu$ , als Bestimmungszahlen in bezug auf ein neues Bezugssystem auffassen, dessen Lage in bezug auf das alte durch die Wahl der  $\mathcal{N}_\nu^\nu$  festgelegt ist. Ein solches Bezugssystem heisst *anholonom* wenn nicht gleichzeitig

$$\partial_{[\mu} \mathcal{N}_{\lambda]}^\nu = 0 \dots \dots \dots \dots \quad (15)$$

$$q = 0 \dots \dots \dots \dots \dots \quad (16)$$

ist. Die erste Forderung besagt, dass  $\mathcal{N}_\lambda^{\nu'} dx^\lambda$  exakte Differentiale sind, nämlich die Differentiale der nach (4) berechneten  $x^\nu$  dividiert durch  $q+1$ , die zweite, dass diese Ausdrücke gerade die Differentiale der  $x^\nu$  sind.

Die Ausdrücke

$$\Omega_{\lambda'\mu'}^{\nu'} = \mathcal{N}_{\mu'\lambda'}^{\mu\lambda} \partial_{[\mu} \mathcal{N}_{\lambda]}^{\nu'} \quad \dots \quad (17)$$

und die Zahl  $q$  dürfen als bekannt vorausgesetzt werden sobald ein anholonomes System gegeben ist. Ihr Verschwinden besagt dass Erfülltsein der Holonomitätsforderungen.

## § 2. Zusammenhang, Uebertragung, Korrespondenz.

Ein linearer *Zusammenhang* liegt vor, wenn eine kovariante Differentiation von Projektoren vom Exzess Null definiert ist, gegeben durch

$$\nabla_\mu v^\nu = \partial_\mu v^\nu + \Pi_{\lambda\mu}^\nu v^\lambda \quad \dots \quad (18)$$

Beim Uebergang zu einem anderen holonomen oder anholonomem System transformieren sich die  $\Pi_{\lambda\mu}^\nu$  folgendermassen

$$\Pi_{\lambda'\mu'}^{\nu'} = \mathcal{N}_{\lambda'\mu'}^{\lambda\mu} \Pi_{\lambda\mu}^\nu - \mathcal{N}_{\mu'\lambda'}^{\mu\lambda} \partial_{[\mu} \mathcal{N}_{\lambda]}^{\nu'} \quad \dots \quad (19)$$

Sie bilden ein geometrisches Objekt vom Exzess Null. Der *Exzess ändert sich also nicht bei kovarianter Differentiation*.

Aus (19) und (17) folgt dass

$$S_{\lambda\mu}^{\nu} = \Pi_{[\lambda\mu]}^\nu - \Omega_{\lambda\mu}^\nu \quad \dots \quad (20)$$

$$P_{\cdot\lambda}^\nu = \Pi_{\lambda\mu}^\nu x^\mu + (q+1) \mathcal{N}_\lambda^{\nu} \quad \dots \quad (21)$$

$$Q_{\cdot\mu}^\nu = \Pi_{\lambda\mu}^\nu x^\lambda + 2\Omega_{\lambda\mu}^\nu x^\lambda + (q+1) \mathcal{N}_\mu^{\nu} = \Pi_{\lambda\mu}^\nu x^\lambda + \partial_\mu x^\nu = \nabla_\mu x^\nu \quad (22)$$

Projektoren vom Exzess Null sind. Für ein holonomes Bezugssystem vereinfachen sich diese Formeln bedeutend, da  $\Omega_{\lambda\mu}^\nu$  und  $q$  verschwinden.

Ist  $P_{\cdot\lambda}^\nu \neq 0$ , so ist jedem Punktfeld  $v^\nu$  vom Exzess Null in eindeutiger Weise ein Punktfeld  $x^\mu \nabla_\mu v^\nu = P_{\cdot\mu}^\nu v^\nu$  zugeordnet. Diese Zuordnung heisst die zum *Zusammenhang* gehörige *Korrespondenz*.

Ist das kovariante Punktfeld  $t_\lambda$  gegeben und damit  $A_\lambda^\nu$ , so ist

$$d' x^\nu = A_\lambda^\nu dx^\lambda \quad \dots \quad (23)$$

im Gegensatz zu  $dx^\nu$  ein kontravarianter Punkt und zwar ein Vektor, und es lässt sich also ein *kovariantes Differential* bilden

$$\delta v^\nu = d' x^\mu \nabla_\mu v^\nu, \quad \dots \quad (24)$$

und eine *Uebertragung* definieren mittels der Vorschrift: kovariantes Differential  $= 0$ :

$$dv^\nu = -\Pi_{\lambda\mu}^\nu v^\lambda d' x^\mu. \quad \dots \quad (25)$$

Die Korrespondenz zusammen mit der Uebertragung bestimmen den Zusammenhang eindeutig und umgekehrt.

### § 3. Fundamentalquadrik; Polarität und Nullverwandtschaft.

Wir führen in jeder lokalen  $E_4^*$  eine nichtdegenerierte Quadrik mit Trägheitsindex 3 (die *Fundamentalquadrik*) ein, die den Berührungs punkt nicht enthält. Diese bestimmt eindeutig und wird eindeutig bestimmt durch einen symmetrischen Projektor  $G_{\lambda\mu}$  vom Exzess 0, mit der Normierungsbedingung

$$G_{\lambda\mu} x^\lambda x^\mu = -\omega^2 \quad \dots \quad (26)$$

wo  $\omega$  eine positive Konstante von der Dimension  $L$  ist, die die Längeneinheit festlegt. Der kovariante *Fundamentalprojektor*  $G_{\lambda\mu}$ , sowie der zugehörige kontravariante *Fundamentalprojektor*  $G^{\mu\nu}$  werden wie üblich zum Herauf- und Herunterziehen von Indizes benutzt. Die Hyperebene des kovarianten Punktes

$$x_\lambda = G_{\lambda\mu} x^\mu \quad \dots \quad (27)$$

ist die Polarhyperebene des Kontaktpunktes in Bezug auf die Fundamentalquadrik. Wir setzen

$$t_\lambda = -\omega^{-2} x_\lambda, \quad \dots \quad (27^{1/2})$$

und betrachten  $t_\lambda$  als unendlichferne Hyperebene. Der Berührungs punkt wird dadurch zum Mittelpunkt der Quadrik. In der  $E_4^*$  wird eine Minkowskische Metrik festgelegt und die Quadrik wird eine Hyperkugel mit Radius  $\omega$ .

Der alternierte Differentialquotient von  $x_\lambda$  in bezug auf holonome Koordinaten ist ein alternierender Projektor

$$x_{\mu\lambda} = \partial_{[\mu} x_{\lambda]} + \Omega_{\lambda\mu}^\nu x_\nu = \partial_{[\mu} x_{\lambda]}, \quad \dots \quad (28)$$

dessen Ueberschiebung mit  $x^\mu$  verschwindet:

$$0 = x^\mu x_{\mu\lambda} = x^\mu \partial_{[\mu} x_{\lambda]}, \quad \dots \quad (29)$$

und der also ein *Bivektor* ist.

Dieser Bivektor legt in der Hyperebene von  $x_\lambda$  eine Nullverwandtschaft fest. Offenbar bestimmt  $G_{\lambda\mu}$  in derselben Hyperebene eine Polarität vermöge des *Fundamentaltensors*

$$\begin{aligned} g_{\lambda\mu} &= A_{\lambda\mu}^{\rho\sigma} G_{\rho\sigma} = G_{\lambda\mu} + \omega^{-2} x_\lambda x_\mu, & (a) \\ g^{\mu\nu} &= A_{\rho\sigma}^{\mu\nu} G^{\rho\sigma} = G^{\mu\nu} + \omega^{-2} x^\mu x^\nu & (b) \end{aligned} \quad \dots \quad (30)$$

<sup>1)</sup> Bei *Affinoren* können wir Indizes nach Belieben auch mit  $g^{\mu\nu}$  bzw.  $g_{\lambda\mu}$  herauf- und herunterziehen.

der RIEMANNSchen Massbestimmung:

$$ds^2 = g_{\lambda\mu} d'x^\lambda d'x^\mu = g_{\lambda\mu} dx^\lambda dx^\mu ; \quad d'x^\nu = (N_\lambda^\nu + \omega^{-2} x_\lambda x^\nu) dx^\lambda . \quad (31)$$

Wir werden in dieser Arbeit manchmal ein besonderes anholonomes Bezugssystem  $(c), (a, \dots, g = 0, 1, 2, 3, 4)$  verwenden, in bezug auf welches ein kontravarianter Vektor  $v^\nu$  die gewöhnlichen *orthogonalen* Bestimmungszahlen  $v^1, v^2, v^3, v^4$  hat, während alle Bestimmungszahlen von  $x^\nu$  und  $x_\lambda$  mit Ausnahme von  $x^0 = 1$  und  $x_0 = -\omega^2$  verschwinden.<sup>1)</sup> In bezug auf dieses System hat  $G_{\lambda\mu}$  die Bestimmungszahlen

$$\left. \begin{aligned} G_{00} &= -\omega^2; \\ G_{11} = G_{22} = G_{33} &= +1; \quad G_{44} = -1; \\ G_{0i} = G_{i0} &= 0; \quad G_{ij} = 0 \quad \text{für } i \neq j. \end{aligned} \right\} \dots \quad (32)$$

Die anholonomen Differentiale  $(d\xi)^1, (d\xi)^2, (d\xi)^3, (d\xi)^4$  können also in einem Punkt für ein diesem Punkte zugeordnetes geodätisches Koordinatensystem mit  $dx, dy, dz, cdt$  bezeichnet werden.<sup>2)</sup>

Bei dieser Wahl gilt für jeden Punkt

$$\left. \begin{aligned} v^0 &= v^\nu t_\nu = -\omega^{-2} v^\nu x_\nu, \quad (a) \\ w_0 &= w_\nu x^\nu, \quad (b) \end{aligned} \right\} \dots \quad (33)$$

und Entsprechendes für die nullten Bestimmungszahlen anderer Projektoren.

#### § 4. Der zur Fundamentalquadrik gehörige projektive Zusammenhang.

Wir stellen folgende zwei geometrische Forderungen.

1. Die Fundamentalquadrik bleibt bei der Uebertragung invariant.
2. Die Hyperebene von  $x_\lambda$  bleibt bei der Korrespondenz invariant (d. h. Vektoren gehen in Vektoren über) und bei der Korrespondenz zugeordnete Punkte sind polar verwandt in bezug auf die Fundamentalquadrik.

Aus diesen Bedingungen ergibt sich

$$\left. \begin{aligned} \nabla_\mu G_{\lambda\nu} &= s_\mu G_{\lambda\nu}, \quad (a) \\ x^\mu s_\mu &= 0, \quad (b) \\ P_{(\lambda\mu)} &= 0, \quad (c) \\ x^\mu P_{\lambda\mu} &= 0, \quad (d) \end{aligned} \right\} \dots \quad (34)$$

<sup>1)</sup> Es ist zu bemerken, dass der Index 0 eine besondere Rolle spielt im Gegensatz zum Index 0, der in keiner Weise vor den Indizes 1, 2, 3, 4 ausgezeichnet ist (Vgl. 33a).

<sup>2)</sup> Die Gleichung der Quadrik lautet bei geeigneter Wahl der Koordinaten in der lokalen  $E_4^*$ :

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 - \omega^2 = 0.$$

wo  $s_\mu$  ein beliebiger kovarianter Vektor (d.h. ein kovarianter Punkt in der Hyperebene von  $x_\lambda$ ) vom Exzess Null ist. Aus (20) und (34a) folgt

$$\Pi_{\lambda\mu}^* = \frac{1}{2} G^{\rho\sigma} (\partial_\lambda G_{\mu\rho} + \partial_\mu G_{\lambda\rho} - \partial_\rho G_{\lambda\mu}) - s_{[\mu} A_{\lambda]}^{\nu} + \frac{1}{2} s^\nu G_{\lambda\mu} + S_{\lambda\mu}^{\nu} - 2 S_{(\lambda\mu)}^{\nu} \quad (35)$$

für holonome Bezugssysteme. Daraus folgt mittels (34 b, c, d)

$$Q_{\lambda\mu} = x_{\mu\lambda} + S_{\mu\lambda} + 2 T_{\mu\lambda} - \frac{1}{2} s_\mu x_\lambda \quad \dots \quad (36)$$

$$P_{\lambda\mu} = x_{\mu\lambda} + S_{\mu\lambda} - 2 Z_{\mu\lambda}, \quad \dots \quad (37)$$

$$s_\lambda = -4 \omega^{-2} S_{\lambda\mu\nu} x^\mu x^\nu, \quad \dots \quad (38)$$

wo

$$S_{\mu\lambda} = A_{\mu\lambda}^{\sigma\rho} S_{\sigma\rho\nu} x^\nu = S_{\mu\lambda\nu} x^\nu - \frac{1}{2} s_{[\mu} x_{\lambda]} \quad \dots \quad (39)$$

$$T_{\mu\lambda} = A_{\mu\lambda}^{\sigma\rho} S_{\nu(\sigma\rho)} x^\nu = S_{\nu(\mu\lambda)} x^\nu + \frac{1}{4} s_{(\mu} x_{\lambda)} \quad \dots \quad (40)$$

$$Z_{\mu\lambda} = A_{\mu\lambda}^{\sigma\rho} S_{\nu[\sigma\rho]} x^\nu = S_{\nu[\mu\lambda]} x^\nu + \frac{1}{4} s_{[\mu} x_{\lambda]} \quad \dots \quad (41)$$

$$S'_{\lambda\mu}^{\nu} = A_{\lambda\mu\tau}^{\rho\sigma} S_{\rho\sigma}^{\nu} = S_{\lambda\mu}^{\nu} + \omega^{-2} S_{\lambda\mu} x^\nu + 2 \omega^{-2} x_{[\lambda} (Z_{\mu]}^{\nu} + T_{\mu]}^{\nu}) + \left. \begin{array}{l} \\ + \frac{1}{2} \omega^{-2} s_{[\lambda} x_{\mu]} x^\nu \end{array} \right\} \quad (42)$$

Affinoren sind.

In der Hyperebene von  $x_\lambda$  liegen einerseits die Polarität von  $g_{\lambda\mu}$  und die Nullverwandtschaft von  $x_{\mu\lambda}$ , andererseits die Korrespondenz von  $P_{\lambda\mu}$ . Weil nun wegen (34c) das Produkt  $P_{\lambda\mu}$  der Korrespondenz und der Polarität selbst eine Nullverwandtschaft ist, und weil sowohl die Polarität als auch die Nullverwandtschaft von der Uebertragung unabhängig sind und nur von der Quadrik abhängen, stellen wir die dritte geometrische Forderung:

3. Die Korrespondenz in der Hyperebene von  $x_\lambda$  entsteht durch die Aufeinanderfolge der Polarität von  $g_{\lambda\mu}$  und der Nullverwandtschaft von  $x_{\mu\lambda}$ .

Sodann ist

$$P_{\lambda\mu} = \theta x_{\mu\lambda} \quad \dots \quad (43)$$

wo  $\theta$  eine Konstante ist die näherer Bestimmung harrt. (Vgl. § 8).

### § 5. Geodätische Linien.

Wird ein Punkt  $v^\nu$  in einer bestimmten  $E_4^*$  in der Richtung der Verbindungsgeraden mit dem Kontakt punkt übertragen, so geht er in einen bestimmten Punkt der benachbarten  $E_4^*$  über. Wird dieser Prozess fortgesetzt, so bestimmen die sukzessiven Fortschreitungsrichtungen eine Kurve, die wir kurz geodätisch<sup>1)</sup> nennen. Wir zeigen dass die Kurve

<sup>1)</sup> In A. P. D. I. sind die wichtigsten Arten von geodätischen Linien aufgezählt. Die hier benutzten sind dort als „halb-affingeodätisch“ klassifiziert.

nur von der ersten Fortschreibungsrichtung (die wir zeitartig wählen) und von der zeitlichen Entfernung (die wir mit  $\frac{l}{c}$  bezeichnen) des Punktes  $v^y$  vom Kontaktpunkt abhängt. Wegen

$$\left. \begin{aligned} v^0 &= v = v^y t_y = -\omega^{-2} v^y x_y, \\ v &= v \frac{l}{c} \frac{d\xi^k}{dt}; \quad dt^2 = -\frac{1}{c^2} ds^2, \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots \quad (44)$$

ist die Gleichung der geodätischen Linie:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{(d\xi^k)}{dt} + \Gamma_{ij}^k \frac{(d\xi^i)}{dt} \frac{(d\xi^j)}{dt} &= + \frac{c}{l} (x_{.j} + S_{.j}^k - 2T_{.j}^k) \frac{(d\xi^j)}{dt} + \\ + \frac{c^2}{2} s^k + \left( \frac{1}{2} s_j \frac{(d\xi^j)}{dt} + \frac{2l}{c\omega^2} T_{ij} \frac{(d\xi^i)}{dt} \frac{(d\xi^j)}{dt} \right) \frac{(d\xi^k)}{dt} - 2S'_{.ij} \frac{(d\xi^i)}{dt} \frac{(d\xi^j)}{dt} \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

Nun lautet aber die Gleichung der Weltlinie eines geladenen Massen- teilchens

$$\frac{d}{dt} \frac{(d\xi^k)}{dt} + \Gamma_{ij}^k \frac{(d\xi^i)}{dt} \frac{(d\xi^j)}{dt} = -\frac{e}{mc} F_j^k \frac{(d\xi^j)}{dt} \quad \dots \dots \quad (46)$$

Führen wir also als erste physikalische Forderung ein:

1. Die Weltlinien geladener Massen, sind die zu konstantem  $l$  gehörigen geodätischen Linien, so folgt:

$$s^k = -\frac{1}{3} S'_{.j}^k, \quad \dots \dots \quad (47)$$

$$S'_{.ij} = -\frac{1}{4} g_{ij} s^k + \frac{1}{4} A_{(i}^k s_{j)}, \quad \dots \dots \quad (48)$$

$$x_{ij} + S_{ij} = \lambda F_{ij}, \quad \dots \dots \quad (49)$$

$$l = \frac{mc^2}{e} \lambda, \quad \dots \dots \quad (50)$$

$$T_{ij} = 0, \quad \dots \dots \quad (51)$$

wo  $\lambda$  eine von der Gestalt der Bahnkurve unabhängige Konstante von der Dimension  $M^{-1/2} L^{1/2} T$  ist.

Die zweite physikalische Forderung sei:

2. In einem reinen Gravitationsfeld ist die Uebertragung von Vektoren identisch mit der RIEMANNSchen Uebertragung der gewöhnlichen Relativitätstheorie.

Aus dieser zweiten Forderung ergibt sich

$$S'_{ij}^k = 0, \text{ also } s^k = 0 \quad \dots \dots \quad (52)$$

Die Parameter der Uebertragung in bezug auf das gewählte anholonome

1) Bei dieser Wahl des Vorzeichens ist  $e$  die wirkliche Ladung (also  $> 0$  für Protonen,  $< 0$  für Elektronen) und  $F_{ik} = 2\partial_{[i} \omega_{k]}$ , wo  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  die Komponenten des magnetischen Potentialvektors sind und  $-\omega_4$  das elektrische Potential ist.

Bezugssystem haben also jetzt, sofern sie nicht verschwinden, folgende Werte

$$\left. \begin{aligned} \Pi_{ij}^k &= \Gamma_{ij}^k \left( \stackrel{*}{=} \left\{ \begin{array}{c} k \\ ij \end{array} \right\} \text{ für holonome Bezugssysteme} \right), \\ \Pi_{ij}^0 &= -\omega^{-2} \lambda F_{ij}; \quad \Pi_{0j}^k = \lambda F_j^k; \quad \Pi_{i0}^k = \lambda F_i^k - 2 Z_i^k. \end{aligned} \right\} \quad . . \quad (53)$$

Die RIEMANNsche Uebertragung lässt sich auffassen als eine projektive Uebertragung besonderer Art, die Vektoren in Vektoren überführt und von deren 125 Parameter  $\Pi_{ab}^c$  ( $a, \dots, g = 0, 1, 2, 3, 4$ ) nur die  $\stackrel{R}{\Pi}_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k$  ( $h, \dots, m = 1, 2, 3, 4$ ) nicht verschwinden. Aus (53) folgt dann für ein allgemeines Bezugssystem ( $v$ ):

$$\stackrel{R}{\Pi}_{\lambda\mu}^{\nu} - \stackrel{R}{\Pi}_{\lambda\mu}^{\nu} = -\omega^{-2} (\lambda F_{\lambda\mu} x^{\nu} + \lambda x_{\lambda} F_{\mu}^{\nu} + \lambda F_{\lambda}^{\nu} x_{\mu} - 2 Z_{\lambda}^{\nu} x_{\mu}) . \quad (54)$$

Als *projektive* Uebertragung betrachtet ist also die RIEMANNsche Uebertragung nicht symmetrisch. Sie ist charakterisiert durch die Eigenschaften:

$$\stackrel{R}{\nabla}_{\omega} g_{\lambda\mu} = 0, \quad \stackrel{R}{\nabla}_{\mu} x^{\nu} = 0, \quad \stackrel{R}{\nabla}_{\mu} x_{\lambda} = 0, \quad \stackrel{R}{S}_{\lambda\mu}^{\nu} = \omega^{-2} x_{\lambda\mu} x^{\nu}, \quad . \quad (55)$$

wo  $\stackrel{R}{\nabla}$  den kovarianten Differentialoperator der RIEMANNschen Geometrie darstellt.

### § 6. Diracsche Gleichung.<sup>1)</sup>

Wir führen die Diracschen hyperkomplexen Zahlen  $a^c$  ( $a, \dots, g = 0, 1, 2, 3, 4$ ) ein mit Hilfe der Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} a^{(a} a^{b)} &= G^{ab}; \quad a^{(a} a^{b)} a^c = a^a a^{(b} a^c); \\ a^0 &= \omega^{-1} a^1 a^2 a^3 a^4. \end{aligned} \right\} \quad . . . . . \quad (56)$$

$a^c$  lässt sich als ko-kontravarianter Spinor (Affnor des Spinraumes) der Valenz Zwei auffassen und dementsprechend  $a^c{}^C_A$  ( $A, \dots, G = 5, 6, 7, 8$ ) schreiben.

Wie einer von uns in D. E. gezeigt hat, ist ein kovariantes Differential für kontravariante bzw. kovariante Spinvektordichten vom Gewicht  $+\frac{1}{4}$  bzw.  $-\frac{1}{4}$  festgelegt durch die Forderung, dass das kovariante Differential von  $a^c{}^C_A$  verschwindet. Bei geeigneten Koordinaten im Spinraum verschwindet auch das gewöhnliche Differential von  $a^c{}^C_A$ . Sind  $A^C_{Ab}$

<sup>1)</sup> Vergl. J. A. SCHOUTEN, Die Darstellung der LORENTZgruppe in der komplexen  $E_2$  abgeleitet aus den Diracschen Zahlen, Proc. Kon. Akad. v. Wet. 33 (1930) 189–197; ausführliche Erörterung in: Dirac equations in general relativity, Journ. of Math. and Phys. Massach. 10 (1932) 239–283. Zitiert als D. E.

die Parameter dieser Differentiation in Bezug auf diese Koordinaten, so ist

$$A_{Ab}^C = -\frac{1}{4} \gamma_{ac} \alpha_{..A}^{acC}; \quad \gamma_{ac} = \Pi_{ab}^d G_{dc}; \quad \alpha^{ac} = \alpha^a \alpha^c, \dots \quad (57)$$

Die kovariante Differentiation der Pseudospinvektordichte  $\psi^C$  der Materiewellen lautet <sup>1)</sup>:

$$\nabla_b \psi^C = \partial_b \psi^C + A_{Ab}^C \psi^A - \frac{ei}{ch} \varphi_b^* \psi^C. \dots \quad (58)$$

wo  $\varphi_b^*$  ein kovarianter Punkt ist, der sich bei Ersetzung von  $\psi^C$  durch  $e^{i\varphi} \psi^C$  um  $\frac{h}{c} \partial_b \varphi$  vermehrt.

Wir stellen nun die dritte physikalische Forderung:

3. Die Diracsche Wellengleichung hat die denkbar einfachste Gestalt:

$$\frac{h}{i} \alpha^b \nabla_b \psi^C = 0. \quad (1a) \quad \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad (59)$$

wo  $\psi^C$  die Pseudospinvektordichte der Zustandsgrösse der Materiewellen ist.

Diese Forderung ist dann und nur dann erfüllt, wenn

$$\varphi_0^* = -i\omega \frac{mc^2}{e} = \text{const.} \quad \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad (60)$$

$$\varphi_i^* = \varphi_i;$$

und

$$\lambda F_{ij} + 2 Z_{ij} = 0 \quad (61)$$

ist. Der Potentialvektor  $\varphi_j$  ist also Vektorteil eines kovarianten Punktes  $\varphi_i^*$ , dessen konstante Bestimmungszahl  $\varphi_0^*$  den Massenterm hervorbringt. *Massenwirkung und elektromagnetische Feldwirkung entspringen also jetzt aus derselben Quelle*: der Unbestimmtheit von  $\psi$ .

### § 7. Impulsenergievektor und Impulsenergiepunkt.

Die Gleichung (46) der geodätischen Linien lässt sich schreiben:

$$\frac{\delta}{d\tau} \left( m \frac{dx^\nu}{d\tau} + \frac{e}{c\lambda} x^\nu \right) = 0. \quad \dots \dots \dots \dots \dots \quad (62)$$

<sup>1)</sup> Ein Pseudovektor ist ein Vektor, der bis auf einen skalaren Faktor bestimmt ist. Dieser Faktor hat hier die Form  $e^{i\varphi}$ . Die Theorie der kovarianten Differentiation von Dichten und Pseudogrößen findet sich in J. A. SCHOUTEN und V. HLAVATÝ, Zur Theorie der allgemeinen linearen Uebertragung, Math. Zeitschr. **30** (1929) 414–432. Der Gedanke, das bei Pseudogrößen auftretende Zusatzglied als elektromagnetische Feldwirkung zu deuten röhrt von WEYL her, Elektron und Gravitation, Zeitschr. f. Phys. **56** (1929) 330–352.

<sup>1a)</sup> Vgl. die Fussnote zu Formel (46)!

<sup>2)</sup> Bei einer Wahl von  $\gamma$  und  $\theta$  die dieser Gleichung nicht genügt entstehen neue Glieder in der Wellengleichung zweiter Ordnung. Darunter befindet sich merkwürdigerweise ein Spinglied das im Gegensatz zum gewöhnlichen Spinglied aus einem *reellen* elektrischen und einem *rein imaginären* magnetischen Teil besteht.

$m \frac{d' x^\nu}{d\tau}$  ist der kinetische Impulsenergievektor. Nun folgt aus (37), (43), (49) und (61)

$$F_{\mu\lambda} = \frac{\theta}{2\lambda} x_{\mu\lambda} = \frac{\theta}{2\lambda} \partial_{[\mu} x_{\lambda]}. \quad \dots \dots \dots \quad (63)$$

Andrerseits ist aber

$$F_{ij} = 2 \overset{R}{\nabla}_{[i} \varphi_{j]}, \text{ also } F_{\mu\lambda} = 2 \partial_{[\mu} \varphi_{\lambda]}; \quad \varphi_\lambda = A_\lambda^i \varphi_i. \quad \dots \dots \quad (64)$$

Der Potentialvektor  $\varphi_\lambda$  unterscheidet sich also vom kovarianten Punkte  $\frac{\theta}{4\lambda} x_\lambda$  nur um einen (projektiven) Gradienten, für den wir  $\frac{\theta \omega^2}{4\lambda} \partial_\lambda \log \chi$  schreiben:

$$\varphi_\lambda = \frac{\theta}{4\lambda} (x_\lambda + \omega^2 \partial_\lambda \log \chi). \quad \dots \dots \dots \quad (65)$$

$\chi$  ist demzufolge ein (projektiver) Skalar vom Grad und Exzess *Eins*, der vollständig beliebig wählbar ist, entsprechend dem Umstande, dass  $\varphi_\lambda$  nur bis auf einen Gradientvektor bestimmt ist. Trotz dieser Unbestimmtheit ist der kovariante Punkt  $\frac{\theta}{4\lambda} x_\lambda$ , der  $\varphi_\lambda$  in (64) vollständig zu ersetzen vermag, eindeutig bestimmt. Man kann also die Bestimmungszahlen dieses Punktes als die „wirklichen“ und diejenigen des Vektors  $\varphi_\lambda$  als die „scheinbaren“ Potentiale auffassen; letztere entstehen nur dadurch aus den ersten, dass man vom (eindeutig bestimmten) Potentialpunkten einen solchen (dadurch nur bis auf einen Gradientvektor bestimmten) projektiven Gradienten abzieht, dass ein Vektor übrigbleibt. In bezug auf das anholonome System (c) hat der „wirkliche“ Potentialpunkt nur eine nicht verschwindende Bestimmungszahl  $-\frac{\theta \omega^2}{4\lambda}$ . Der Vektor  $\frac{e}{c} \varphi^\nu$  ist bekanntlich der *potentielle Impulsenergievektor*; dementsprechend lässt sich also  $\frac{\theta e}{4\lambda c} x^\nu$  als *potentieller Impulsenergiepunkt* und

$$p^\nu = m \frac{d' x^\nu}{d\tau} + \frac{\theta e}{4\lambda c} x^\nu. \quad \dots \dots \dots \quad (66)$$

als *totaler Impulsenergiepunkt* auffassen. Wir stellen nun die *vierie physikalische Forderung*:

4. Der totale Impulsenergiepunkt ist längs einer Weltlinie konstant. Es ergibt sich dann wegen (62)  $\theta = 4$  und somit;

$$\lambda F_{\lambda\mu} = 2 x_{\lambda\mu} \quad \dots \dots \dots \quad (67)$$

$$S_{\lambda\mu} = x_{\lambda\mu}; \quad Z_{\lambda\mu} = -x_{\lambda\mu}; \quad P_{\lambda\mu} = -4 x_{\lambda\mu}; \quad Q_{\lambda\mu} = -2 x_{\lambda\mu}. \quad (68)$$

$$S_{\lambda\mu}^\nu = -\omega^{-2} (x_{\lambda\mu} x^\nu - x_\lambda x_\mu^\nu + x_\lambda^\nu x_\mu) \quad \dots \dots \quad (69)$$

$$\Pi_{\lambda\mu}^\nu - \overset{R}{\Pi}_{\lambda\mu}^\nu = -\omega^{-2} (2 x_{\lambda\mu} x^\nu + 2 x_\lambda x_\mu^\nu + 4 x_\lambda^\nu x_\mu) \quad \dots \quad (70)$$

## § 8. Krümmungsgrößen; Variationsprinzip.

Faltung der Krümmungsgrößen

$$N_{\mu\lambda}^{\nu} = -2 \partial_{[\omega} \Pi_{|\lambda|\mu]}^{\nu} - 2 \Pi_{\rho[\omega}^{\nu} \Pi_{|\lambda|\mu]}^{\rho} - 2 (\Pi_{[\omega\mu]}^{\rho} - S_{\omega\mu}^{\rho}) \Pi_{\lambda\rho}^{\nu} \quad (71)$$

ergibt

$$N_{\mu\lambda} = N_{\rho\mu\lambda}^{\nu} = K_{\mu\lambda} - 2 \omega^{-2} \lambda F_{\mu}^{\rho} Z_{\lambda\rho} - 2 \omega^{-2} x_{\mu}^{\rho} (\lambda F_{\lambda\rho} - 2 Z_{\lambda\rho}) + \\ + 2 \omega^{-2} \lambda x_{(\mu} \nabla_{|\rho|}^R F_{\lambda)}^{\rho} - 2 \omega^{-2} x_{\mu} \nabla_{\rho}^R Z_{\lambda}^{\rho} - \left. \begin{array}{l} \\ \\ - \omega^{-4} \lambda x_{\mu} x_{\lambda} F_{\rho\sigma} (\lambda F^{\rho\sigma} - 2 Z^{\rho\sigma}), \end{array} \right\} \quad (72)$$

wo  $K_{\mu\lambda}$  die einmal gefaltete RIEMANNSche Krümmungsgröße ist. Ueberschiebung mit  $G^{\lambda\mu}$  ergibt

$$N = N_{\mu\lambda} G^{\mu\lambda} = K - 4 \omega^{-2} \lambda F_{\sigma\rho} Z^{\sigma\rho} - 2 \omega^{-2} \lambda x_{\sigma\rho} F^{\sigma\rho} + \\ + \omega^{-2} \lambda^2 F_{\sigma\rho} F^{\sigma\rho} + 4 \omega^{-2} x_{\mu\rho} Z^{\mu\rho}, \quad (73)$$

wo  $K = K_{\mu\lambda} g^{\mu\lambda}$  ist.

Das einfachste Variationsprinzip lautet:

$$\delta \int N \sqrt{\mathfrak{G}} dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 dx^4 = 0, \quad \mathfrak{G} = \text{Det}(G_{\lambda\mu}), \dots \quad (74)$$

wo die  $G_{\lambda\mu}$  unter Konstanthalten von  $\omega$  zu variieren sind. Wenn wir nur die Tatsache benutzen dass  $S_{\lambda\mu}$  und  $Z_{\lambda\mu}$  mit  $x_{\lambda\mu}$  proportional sind:  $S_{\lambda\mu} = \sigma x_{\lambda\mu}$ ,  $Z_{\lambda\mu} = \zeta x_{\lambda\mu}$ <sup>1)</sup>, so finden wir:

$$K_{\lambda\mu} - \frac{1}{2} K G_{\lambda\mu} - \omega^{-2} \frac{2\lambda^2}{(1+\sigma)^2} (4\zeta\sigma - \sigma^2 + 1) (F_{\lambda}^{\rho} F_{\mu\rho} - \frac{1}{4} g_{\lambda\mu} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma}) = 0 \\ 2(4\zeta\sigma - \sigma^2 - 1) \omega^{-1} x_{(\lambda} \nabla_{|\rho|}^R F_{\lambda)}^{\rho} = 0 \quad (75)$$

Die fünfte physikalische Forderung sei nun:

5. Das Variationsprinzip ergibt die kombinierten Feldgleichungen von Gravitation und Elektrizität

$$K_{\mu\lambda} - \frac{1}{2} K g_{\mu\lambda} + \frac{\kappa}{c^2} (F_{\mu}^{\rho} F_{\lambda\rho} - \frac{1}{4} F_{\sigma\rho} F^{\sigma\rho} g_{\lambda\mu}) = 0. \quad (76)$$

Aus dieser Forderung folgt  $\sigma \neq -1$  und

$$- 2(4\zeta\sigma - \sigma^2 + 1) \omega^{-2} \lambda^2 = \frac{\kappa}{c^2} (1 + \sigma)^2 \dots \dots \dots \quad (77)$$

also unter Berücksichtigung von  $\sigma = 1$ ,  $\zeta = -1$ :

$$\lambda^2 = \frac{\kappa \omega^2}{2c^2} \dots \dots \dots \dots \dots \quad (78)$$

<sup>1)</sup> Von den sich aus § 7 ergebenden Werten  $\sigma = 1$ ,  $\zeta = -1$  wird noch kein Gebrauch gemacht.

<sup>2)</sup>  $\kappa$  ist die Gravitationskonstante  $1.87 \times 10^{-27}$  cm/g.

Der projektive Zusammenhang ist damit vollständig festgelegt. Die einzige Konstante die noch übrig bleibt ist die Konstante  $\omega$  die die *Lägenheit* bestimmt.<sup>1)</sup>

Der Rest der Gleichung (75) ergibt dann die zweite MAXWELLSche Gleichung

$$\overset{R}{\nabla}_j F_i{}^j = 0 \quad \dots \dots \dots \dots \quad (79)$$

und

$$K = 0 \quad \dots \dots \dots \dots \quad (80)$$

Die erste MAXWELLSche Gleichung

$$\overset{R}{\nabla}_{[k} F_{i]l} = 0 \quad \dots \dots \dots \dots \quad (81)$$

aber folgt schon daraus dass  $F_{\mu\lambda}$  bis auf einen konstanten Faktor gleich  $\partial_{[\mu} x_{\lambda]}$  ist.

Der Fall der symmetrischen projektiven Uebertragung,  $S_{\lambda\mu} = Z_{\lambda\mu} = 0$  ergibt sich für  $\theta = 1$ ,  $\sigma = \zeta = 0$ .

Dies ist der Fall den VEBLEN und HOFFMANN behandelt haben; in ihrer Arbeit fehlen aber die Beziehungen der Weltlinien zu den geodätischen Linien. Dieser Ansatz verträgt sich mit allen unseren geometrischen Forderungen und mit den physikalischen ausser 3 (Diracsche Gleichung) und 4 (Impulsenergiepunkt), führt aber zu einem negativen Wert von  $\omega^2$ .

In einer früheren Arbeit, zeigten wir dass sich die fünfdimensionale EINSTEIN-MAYERSche Theorie als eine vierdimensionale projektive Theorie deuten lässt. Dieser Fall entsteht hier für  $P_{\lambda\mu} = 0$ , also  $\theta = 0$ . Dieser Ansatz verträgt sich mit allen unseren geometrischen Forderungen und mit den physikalischen ausser 3, führt aber gleichfalls zu einem negativen Wert von  $\omega^2$ .<sup>2)</sup>

Im Gegensatz zu diesen beiden Theorien ist es in der hier aufgestellten generellen Feldtheorie durch Einschränkung der *geometrischen Forderungen* gelungen, in eindeutiger Weise eine Geometrie zu bestimmen, die *erstens die richtigen Bewegungsgleichungen und zweitens die richtige RIEMANNsche Geometrie für das reine Gravitationsfeld liefert, drittens die DIRACsche Gleichung für das Elektron inklusiv Massenglied in die denkbar einfachste Form zu bringen gestattet, viertens kovariante Konstanz des totalen Impulsenergiepunktes ergibt, und fünftens aus dem möglichst einfachen Variationsprinzip die Feldgleichungen entspringen lässt.*

1) Man könnte sie z.B. durch  $\omega = \sqrt{\frac{sh}{c}}$  festlegen.

2) Der Wert von  $\sigma$  lässt sich aus dem projektivisierten EINSTEIN-MAYERSchen Ansatz nicht bestimmen. Fordert man noch dass 4 genügt wird, so wird  $\sigma = \zeta = 1$ ; würde man aber 3 fordern, so ergäbe sich  $\sigma = -1$ ,  $\zeta = 0$ , in Widerspruch zu 5.

**Mathematics. — Asymptotische Entwicklungen von BESSELSchen, HANKELSchen und verwandten Funktionen. I. Von C. S. MEIJER. (Communicated by Prof. J. G. VAN DER CORPUT).**

(Communicated at the meeting of May 28, 1932.)

**Einführung.**

Bekanntlich besitzen die HANKELSchen Funktionen  $H_\nu^{(1)}(w)$  und  $H_\nu^{(2)}(w)$  für grosse Werte von  $|w|$  asymptotische Entwicklungen der Gestalt

$$H_\nu^{(1)}(w) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^{i\left(w - \frac{1}{2}\nu\pi - \frac{\pi}{4}\right)}}{w^{1/2}} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(i)^l}{l!} \frac{\prod_{h=0}^{l-1} (4\nu^2 - (2h+1)^2)}{(8w)^l}, \quad \dots \quad (1)$$

$$H_\nu^{(2)}(w) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^{-i\left(w - \frac{1}{2}\nu\pi - \frac{\pi}{4}\right)}}{w^{1/2}} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-i)^l}{l!} \frac{\prod_{h=0}^{l-1} (4\nu^2 - (2h+1)^2)}{(8w)^l}. \quad \dots \quad (2)$$

Für den Fall, dass  $\nu$  reell ist, hat schon SCHLÄFLI<sup>1)</sup> eine numerische obere Schranke bestimmt für den Absolutwert des Restgliedes, das entsteht, wenn man die Entwicklungen (1) und (2) abbricht. Herr WATSON<sup>2)</sup> hat die SCHLÄFLischen Ergebnisse verallgemeinert für komplexe  $\nu$ .

Sind

$$J_\nu(w) = \frac{H_\nu^{(1)}(w) + H_\nu^{(2)}(w)}{2} \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (3)$$

und

$$Y_\nu(w) = \frac{H_\nu^{(1)}(w) - H_\nu^{(2)}(w)}{2i}. \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (4)$$

die BESSELSchen Funktionen der ersten und zweiten Gattung und definiert man  $P_\nu(w)$  und  $Q_\nu(w)$  durch die Beziehungen

$$J_\nu(w) = P_\nu(w) \cos\left(w - \frac{1}{2}\nu\pi - \frac{\pi}{4}\right) + Q_\nu(w) \sin\left(w - \frac{1}{2}\nu\pi - \frac{\pi}{4}\right). \quad (5)$$

$$Y_\nu(w) = P_\nu(w) \sin\left(w - \frac{1}{2}\nu\pi - \frac{\pi}{4}\right) - Q_\nu(w) \cos\left(w - \frac{1}{2}\nu\pi - \frac{\pi}{4}\right), \quad (6)$$

<sup>1)</sup> L. SCHLÄFLI, Sull' uso delle linee lungo le quali il valore assoluto di una funzione è costante, Annali di Matematica (2) VI. (1875) p. 1—20.

<sup>2)</sup> G. N. WATSON, A treatise on the theory of BESSEL functions p. 215—220.

so besitzen  $P_\nu(w)$  und  $Q_\nu(w)$  die asymptotischen Entwicklungen

$$P_\nu(w) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{w^{1/2}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \prod_{h=0}^{2j-1} (4\nu^2 - (2h+1)^2)}{(2j)! (8w)^{2j}}, \quad \dots \quad (7)$$

$$Q_\nu(w) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{w^{1/2}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1} \prod_{h=0}^{2j} (4\nu^2 - (2h+1)^2)}{(2j+1)! (8w)^{2j+1}} \quad \dots \quad (8)$$

Herr WATSON (loc. cit. p. 313—315) betrachtet auch die Funktionen  $A_\nu(w)$  und  $B_\nu(w)$ , die für jedes  $w \neq 0$  und jedes  $\mu$  im Intervall  $-\frac{\pi}{2} < \mu < \frac{\pi}{2}$  durch die Beziehungen<sup>1)</sup>

$$A_\nu(w) = \int_0^{\infty - i(\arg w - \mu)} e^{-w \sinh z} \cosh \nu z \, dz, \quad \dots \quad (9)$$

$$B_\nu(w) = \int_0^{\infty - i(\arg w - \mu)} e^{-w \sinh z} \sinh \nu z \, dz \quad \dots \quad (10)$$

definiert werden können.

Sie besitzen für grosse Werte von  $|w|$  asymptotische Entwicklungen der Gestalt

$$A_\nu(w) \sim \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{w^{2l+1}} \prod_{h=0}^{l-1} (\nu^2 - (2h+1)^2), \quad \dots \quad (11)$$

$$B_\nu(w) \sim \nu \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{w^{2l+2}} \prod_{h=0}^{l-1} (\nu^2 - (2h+2)^2). \quad \dots \quad (12)$$

Ist  $\nu$  reell und  $w$  positiv und bricht man die Entwicklungen (7), (8), (11) und (12) nach  $n$  Gliedern ab, dann liegt nach Herrn WATSON (loc. cit. p. 205—210 und p. 315) der so gemachte Fehler zwischen null und dem ersten vernachlässigten Glied; hier wird  $n > \frac{1}{2}|\nu| - \frac{1}{4}$  bei (7),  $> \frac{1}{2}|\nu| - \frac{3}{4}$  bei (8),  $> \frac{1}{2}|\nu| - \frac{1}{2}$  bei (11) und  $> \frac{1}{2}|\nu| - 1$  bei (12) vorausgesetzt.

Das Ziel dieser Arbeit ist, die SCHLÄFLISCHEN und WATSONSCHEN Ergebnisse zu erweitern. Die Verallgemeinerungen sind die folgenden:

1. Wir bestimmen unter der Voraussetzung, das  $w \neq 0$  und  $-\pi < \arg w < 2\pi$  ist, eine numerische obere Schranke für den Absolut-

1) Herr WATSON nimmt, falls  $-\frac{\pi}{2} < \arg w < \frac{\pi}{2}$  ist, immer  $\mu = \arg w$ .

wert des Restgliedes, das entsteht, wenn man die Entwicklung (1) abbricht, während SCHLÄFLI und Herr WATSON nur den Fall, dass  $-\frac{\pi}{2} < \arg w < \frac{3\pi}{2}$  ist, betrachten; ebenso untersuchen wir das Restglied in (2) für den Fall, dass  $-2\pi < \arg w < \pi$  ist, im Gegensatz zu SCHLÄFLI und Herr WATSON, die nur den Fall, dass  $-\frac{3\pi}{2} < \arg w < \frac{\pi}{2}$  ist, betrachten.

2. Wir bestimmen für komplexe Werte von  $w$  und  $\nu$  eine numerische obere Schranke für den Absolutwert des Restgliedes, das entsteht, wenn man die Entwicklungen (7), (8), (11) und (12) abbricht.

3. Wir definieren, falls  $w \neq 0$  ist und  $\mu$  eine beliebige Zahl im Intervall  $-\frac{\pi}{2} < \mu < \frac{\pi}{2}$  bezeichnet, die Funktion  $G_\nu(w)$  durch die Integraldarstellung <sup>1)</sup>

$$G_\nu(w) = \int_0^{\infty + i(\frac{\pi}{2} - \arg w + \mu)} e^{izw} \cosh z \sinh \nu z dz, \dots \quad (13)$$

leiten eine asymptotische Entwicklung für  $G_\nu(w)$  ab und bestimmen eine numerische obere Schranke für den Absolutwert des Restgliedes, das entsteht, wenn man die Entwicklung abbricht.

4. Wir bestimmen für den Fall, dass  $\nu$  reell ist, Schranken für das Argument jedes der betrachteten Restglieder.

Die gefundenen Ergebnisse werden zusammengefasst in den folgenden Sätzen <sup>2)</sup>.

**Satz 1.** Es sei  $\Re(\nu) = a$ ,  $w \neq 0$ ,  $-\pi < \arg w < 2\pi$ ,  $\arg w^{1/2} = \frac{1}{2} \arg w$  und  $N$  ganz rational  $> |a| - \frac{1}{2}$ .

*Behauptungen:*

1. Falls  $a + \frac{1}{2}$  nicht ganz rational ist, ist

$$H_\nu^{(1)}(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^{i(w - \frac{1}{2}\nu\pi - \frac{\pi}{4})}}{w^{1/2}} \left\{ \sum_{l=0}^{N-1} \frac{(i)^l \prod_{h=0}^{l-1} (4\nu^2 - (2h+1)^2)}{l!(8w)^l} + \right.$$

$$\left. \theta_1 \frac{\cos \nu\pi}{\cos a\pi} \frac{(i)^N \prod_{h=0}^{N-1} (4a^2 - (2h+1)^2)}{N!(8w)^N} \right\}.$$

<sup>1)</sup> Der Wert des Integrals (13) ist bekanntlich, falls  $-\frac{\pi}{2} < \mu < \frac{\pi}{2}$  ist, nicht von  $\mu$  abhängig.

<sup>2)</sup> Eine leere Summe wird gleich 0 und ein leeres Produkt gleich 1 gesetzt.

Hierin ist

$$|\theta_1| < 1, \text{ falls } 0 \leq \arg w \leq \pi \text{ ist, . . . . .} \quad (14)$$

$$|\theta_1| < \frac{1}{\cos(\mu_1 - \arg w) (\cos \mu_1)^{N+1/2}}, \text{ falls } -\pi < \arg w < 0 \text{ ist, . . . . .} \quad (15)$$

wo  $\mu_1$  den durch die Bedingung

$$\sin(\arg w - 2\mu_1) = \frac{2N-1}{2N+1} \sin \arg w, \text{ . . . . .} \quad (16)$$

eindeutig bestimmten, im Falle  $-\pi < \arg w \leq -\frac{\pi}{2}$  zwischen  $-\frac{\pi}{2}$  und  $\frac{\pi}{2} + \arg w$  und im Falle  $-\frac{\pi}{2} < \arg w < 0$  zwischen  $\arg w$  und  $0$  liegenden Winkel bezeichnet. Ausserdem ist

$$|\theta_1| < \frac{-1}{\cos(\mu_2 - \arg w) (\cos \mu_2)^{N+1/2}}, \text{ falls } \pi < \arg w < 2\pi \text{ ist, } \quad (17)$$

wo  $\mu_2$  den durch die Bedingung

$$\sin(\arg w - 2\mu_2) = \frac{2N-1}{2N+3} \sin \arg w, \text{ . . . . .} \quad (18)$$

eindeutig bestimmten, im Falle  $\frac{3\pi}{2} \leq \arg w < 2\pi$  zwischen  $-\frac{3\pi}{2} + \arg w$  und  $\frac{\pi}{2}$  und im Falle  $\pi < \arg w < \frac{3\pi}{2}$  zwischen  $0$  und  $\arg w - \pi$  liegenden Winkel bezeichnet. Schliesslich ist

$$0 \leq \arg \theta_1 \leq \arg w - \frac{\pi}{2}, \text{ falls } \nu = a \text{ und } \frac{\pi}{2} \leq \arg w < \frac{3\pi}{2} \text{ ist } \quad (19)$$

und

$$\arg w - \frac{\pi}{2} \leq \arg \theta_1 \leq 0, \text{ falls } \nu = a \text{ und } -\frac{\pi}{2} < \arg w \leq \frac{\pi}{2} \text{ ist. } \quad (20)$$

2. Falls  $|a| = k + \frac{1}{2}$  ( $k$  ganz rational) und  $\nu \neq a$  ist, ist

$$H_\nu^{(1)}(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^{i(w - \frac{1}{2}\nu\pi - \frac{\pi}{4})}}{w^{1/2}} \left\{ \sum_{l=0}^{N-1} \frac{\frac{(i)^l}{l!} \prod_{h=0}^{l-1} (4\nu^2 - (2h+1)^2)}{(8w)^l} + \right. \\ \left. \theta_1 \frac{(-1)^{k+1} (i)^N (8k+4) \cos \nu\pi}{\pi N! (8w)^N} \prod_{h=0}^{N-1} (4a^2 - (2h+1)^2) \right\}$$

worin  $\theta_1$  den Beziehungen (14), (15) und (17) genügt.

3. Falls  $|a| = k + \frac{1}{2}$  ( $k$  ganz rational) und  $\nu = a$  ist, ist

$$H_{\nu}^{(1)}(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^{i\left(w - \frac{1}{2}\nu\pi - \frac{\pi}{4}\right)}}{w^{1/2}} \sum_{l=0}^k \frac{(i)^l \prod_{h=0}^{l-1} (4\nu^2 - (2h+1)^2)}{l! (8w)^l}.$$

**Zusatz.** Wenn  $w \neq 0$  und  $-\pi < \arg w < \pi$  ist, kann man aus Satz 1 mittels der Formel (32)

$$H_{\nu}^{(2)}(w) = -H_{-\nu}^{(1)}(we^{\pi i})$$

eine asymptotische Entwicklung für  $H_{\nu}^{(2)}(w)$  herleiten.

**Satz 2.** Es sei  $\Re(\nu) = a$ ,  $w \neq 0$ ,  $-\pi < \arg w < 2\pi$  und  $N$  ganz rational  $> |a| - 1$ .

Behauptungen:

1. Falls  $a$  nicht ganz rational ist, ist

$$G_{\nu}(w) = 2e^{iw} \nu \sum_{l=0}^{N-1} \frac{(i)^{l+1} l! \prod_{h=0}^{l-1} (4\nu^2 - (2h+2)^2)}{(2w)^{l+1} (2l+1)!} +$$

$$\theta_2 2e^{iw} a \frac{\sin \nu\pi}{\sin a\pi} \frac{(i)^{N+1} N! \prod_{h=0}^{N-1} (4a^2 - (2h+2)^2)}{(2w)^{N+1} (2N+1)!},$$

worin  $\theta_2$  den Beziehungen genügt, die man bekommt, wenn man in (14), (15), (17), (19) und (20)  $\theta_1$  durch  $\theta_2$  und in (15), (16), (17) und (18)  $N$  durch  $N + \frac{1}{2}$  ersetzt.

2. Falls  $|a| = k$  ( $k$  ganz rational  $> 0$ ) und  $\nu \neq a$  ist, ist

$$G_{\nu}(w) = 2e^{iw} \nu \sum_{l=0}^{N-1} \frac{(i)^{l+1} l! \prod_{h=0}^{l-1} (4\nu^2 - (2h+2)^2)}{(2w)^{l+1} (2l+1)!} +$$

$$\theta_2 \frac{e^{iw} (-1)^k (i)^{N+1} 16 k^2 N! \sin \nu\pi}{\pi (2w)^{N+1} (2N+1)!} \prod_{h=k}^{N-1} (4a^2 - (2h+2)^2),$$

worin  $\theta_2$  den Beziehungen genügt, die man bekommt, wenn man in (14), (15) und (17)  $\theta_1$  durch  $\theta_2$  und in (15), (16), (17) und (18)  $N$  durch  $N + \frac{1}{2}$  ersetzt.

3. Falls  $a=0$  und  $\nu \neq 0$  ist, ist

$$G_\nu(w) = 2e^{iw} \nu \sum_{l=0}^{N-1} \frac{(i)^{l+1} l! \prod_{h=0}^{l-1} (4\nu^2 - (2h+2)^2)}{(2w)^{l+1} (2l+1)!} - \theta_2 \frac{e^{iw} 2^N (N!)^3 \sin \nu\pi}{\pi (i)^{N+1} w^{N+1} (2N+1)!},$$

worin  $\theta_2$  den Beziehungen genügt, die man bekommt, wenn man in (14), (15) und (17)  $\theta_1$  durch  $\theta_2$  und in (15), (16), (17) und (18)  $N$  durch  $N + \frac{1}{2}$  ersetzt.

4. Falls  $|a|=k$  ( $k$  ganz rational) und  $\nu=a$  ist, hat man

$$G_\nu(w) = 2e^{iw} \nu \sum_{l=0}^{k-1} \frac{(i)^{l+1} l! \prod_{h=0}^{l-1} (4\nu^2 - (2h+2)^2)}{(2w)^{l+1} (2l+1)!}.$$

**Satz 3.** Es sei  $\Re(\nu) = a$ ,  $w \neq 0$ ,  $-\pi < \arg w < \pi$  und  $N$  ganz rational  $> \frac{|a|}{2} - \frac{1}{2}$ .

Behauptungen:

1. Falls  $a$  keine ungerade ganze Zahl ist, ist

$$A_\nu(w) = \sum_{l=0}^{N-1} \frac{1}{w^{2l+1}} \prod_{h=0}^{l-1} (w^2 - (2h+1)^2) + \theta_3 \frac{\cos \frac{\nu\pi}{2}}{\cos \frac{a\pi}{2}} \frac{1}{w^{2N+1}} \prod_{h=0}^{N-1} (w^2 - (2h+1)^2).$$

Hierin ist

$$|\theta_3| < 1, \text{ falls } -\frac{\pi}{4} \leq \arg w \leq \frac{\pi}{4} \text{ ist, . . . .} \quad (21)$$

$$|\theta_3| < \frac{1}{\sin(2\mu_3 - 2\arg w) (\cos \mu_3)^{2N+1}}, \text{ falls } -\pi < \arg w < -\frac{\pi}{4} \text{ ist, .} \quad (22)$$

wo  $\mu_3$  den durch die Bedingung

$$(2N+3) \cos(3\mu_3 - 2\arg w) = (2N-1) \cos(\mu_3 - 2\arg w) \quad . \quad (23)$$

eindeutig bestimmten, im Falle  $-\pi < \arg w \leq -\frac{3\pi}{4}$  zwischen  $-\frac{\pi}{2}$

und  $\frac{\pi}{2} + \arg w$ , im Falle  $-\frac{3\pi}{4} < \arg w \leq -\frac{\pi}{2}$  zwischen  $-\frac{\pi}{4} + \arg w$

und  $\frac{\pi}{2} + \arg w$  und im Falle  $-\frac{\pi}{2} < \arg w < -\frac{\pi}{4}$  zwischen  $\frac{\pi}{4} + \arg w$  und  $0$  liegenden Winkel bezeichnet. Ausserdem ist

$$|\theta_3| < \frac{1}{\sin(2\arg w - 2\mu_4)(\cos\mu_4)^{2N+1}}, \text{ falls } \frac{\pi}{4} < \arg w < \pi \text{ ist, } \quad (24)$$

wo  $\mu_4$  den durch die Bedingung

$$(2N+3)\cos(3\mu_4 - 2\arg w) = (2N-1)\cos(\mu_4 - 2\arg w) . \quad (25)$$

eindeutig bestimmten, im Falle  $\frac{3\pi}{4} \leq \arg w < \pi$  zwischen  $-\frac{\pi}{2} + \arg w$  und  $\frac{\pi}{2}$ , im Falle  $\frac{\pi}{2} \leq \arg w < \frac{3\pi}{4}$  zwischen  $-\frac{\pi}{2} + \arg w$  und  $-\frac{\pi}{4} + \arg w$  und im Falle  $\frac{\pi}{4} < \arg w < \frac{\pi}{2}$  zwischen  $0$  und  $-\frac{\pi}{4} + \arg w$  liegenden Winkel bezeichnet. Schliesslich ist

$$0 \leq \arg \theta_3 \leq 2\arg w, \text{ falls } \nu = a \text{ und } 0 \leq \arg w < \frac{\pi}{2} \text{ ist} . \quad (26)$$

und

$$2\arg w \leq \theta_3 \leq 0, \text{ falls } \nu = a \text{ und } -\frac{\pi}{2} < \arg w \leq 0 \text{ ist} . \quad (27)$$

2. Falls  $|a| = 2k+1$  ( $k$  ganz rational) und  $\nu \neq a$  ist, ist

$$A_\nu(w) = \sum_{l=0}^{N-1} \frac{1}{w^{2l+1}} \prod_{h=0}^{l-1} (\nu^2 - (2h+1)^2) +$$

$$\theta_3 \frac{(-1)^{k+1} (8k+4) \cos \frac{\nu\pi}{2}}{\pi w^{2N+1} \prod_{\substack{h=0 \\ h \neq \pm k}}^{N-1} (\nu^2 - (2h+1)^2)},$$

worin  $\theta_3$  den Beziehungen (21), (22) und (24) genügt.

3. Falls  $|a| = 2k+1$  ( $k$  ganz rational) und  $\nu = a$  ist, ist

$$A_\nu(w) = \sum_{l=0}^k \frac{1}{w^{2l+1}} \prod_{h=0}^{l-1} (\nu^2 - (2h+1)^2).$$

**Satz 4.** Es sei  $\Re(\nu) = a, w \neq 0, -\pi < \arg w < \pi$  und  $N$  ganz rational  $> \frac{|a|}{2} - 1$ .

Behauptungen:

1. Falls  $\alpha$  keine gerade ganze Zahl ist, ist

$$B_v(w) = v \sum_{l=0}^{N-1} \frac{1}{w^{2l+2}} \prod_{h=0}^{l-1} (v^2 - (2h+2)^2) + \theta_4 \frac{\sin \frac{v\pi}{2}}{\sin \frac{\alpha\pi}{2}} \frac{1}{w^{2N+2}} \prod_{h=0}^{N-1} (\alpha^2 - (2h+2)^2),$$

worin  $\theta_4$  den Beziehungen genügt, die man bekommt, wenn man in (21), (22), (24), (26) und (27)  $\theta_3$  durch  $\theta_4$  und in (22), (23), (24) und (25)  $N$  durch  $N + \frac{1}{2}$  ersetzt.

2. Falls  $|\alpha| = 2k$  ( $k$  ganz rational  $> 0$ ) und  $v \neq \alpha$  ist, ist

$$B_v(w) = v \sum_{l=0}^{N-1} \frac{1}{w^{2l+2}} \prod_{h=0}^{l-1} (v^2 - (2h+2)^2) + \theta_4 \frac{(-1)^k 16 k^2 \sin \frac{v\pi}{2}}{\pi w^{2N+2}} \prod_{\substack{h=0 \\ h \equiv k-1}}^{N-1} (\alpha^2 - (2h+2)^2),$$

worin  $\theta_4$  den Beziehungen genügt, die man bekommt, wenn man in (21), (22) und (24)  $\theta_3$  durch  $\theta_4$  und in (22), (23), (24) und (25)  $N$  durch  $N + \frac{1}{2}$  ersetzt.

3. Falls  $\alpha = 0$  und  $v \neq 0$  ist, ist

$$B_v(w) = v \sum_{l=0}^{N-1} \frac{1}{w^{2l+2}} \prod_{h=0}^{l-1} (v^2 - (2h+2)^2) + \theta_4 \frac{(-1)^N 2^{2N+1} (N!)^2 \sin \frac{v\pi}{2}}{\pi w^{2N+2}},$$

worin  $\theta_4$  den Beziehungen genügt, die man bekommt, wenn man in (21), (22) und (24)  $\theta_3$  durch  $\theta_4$  und in (22), (23), (24) und (25)  $N$  durch  $N + \frac{1}{2}$  ersetzt.

4. Falls  $|\alpha| = 2k$  ( $k$  ganz rational) und  $v = \alpha$  ist, hat man

$$B_v(w) = v \sum_{l=0}^{k-1} \frac{1}{w^{2l+2}} \prod_{h=0}^{l-1} (v^2 - (2h+2)^2).$$

**Satz 5.** Es sei  $\Re(v) = a$ ,  $w \neq 0$ ,  $-\pi < \arg w < \pi$ ,  $\arg w^{1/2} = \frac{1}{2} \arg w$  und  $m$  ganz rational  $> \frac{1}{2} |\alpha| - \frac{1}{4}$ .

Behauptungen:

1. Falls  $\alpha + \frac{1}{2}$  nicht ganz rational ist, ist

$$P_\nu(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{w^{\frac{1}{2}\alpha}} \left\{ \sum_{j=0}^{m-1} \frac{(-1)^j \prod_{h=0}^{2j-1} (4\nu^2 - (2h+1)^2)}{(2j)! (8w)^{2j}} + \theta_5 \frac{\cos \nu\pi}{\cos \alpha\pi} \frac{(-1)^{m-1} \prod_{\substack{h=0 \\ h \neq -k}}^{2m-1} (4\alpha^2 - (2h+1)^2)}{(2m)! (8w)^{2m}} \right\},$$

worin  $\theta_5$  den Beziehungen genügt, die man bekommt, wenn man in (21), (22), (24), (26) und (27)  $\theta_3$  durch  $\theta_5$  und in (22), (23), (24) und (25)  $N$  durch  $m - \frac{1}{4}$  ersetzt.

2. Falls  $|\alpha| = k + \frac{1}{2}$  ( $k$  ganz rational) und  $\nu \neq \alpha$  ist, ist

$$P_\nu(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{w^{\frac{1}{2}\alpha}} \left\{ \sum_{j=0}^{m-1} \frac{(-1)^j \prod_{h=0}^{2j-1} (4\nu^2 - (2h+1)^2)}{(2j)! (8w)^{2j}} + \theta_5 \frac{(-1)^{m+k+1} (8k+4) \cos \nu\pi}{\pi (2m)! (8w)^{2m}} \prod_{\substack{h=0 \\ h \neq -k}}^{2m-1} (4\alpha^2 - (2h+1)^2) \right\},$$

worin  $\theta_5$  den Beziehungen genügt, die man bekommt, wenn man in (21), (22) und (24)  $\theta_3$  durch  $\theta_5$  und in (22), (23), (24) und (25)  $N$  durch  $m - \frac{1}{4}$  ersetzt.

3. Falls  $|\alpha| = k + \frac{1}{2}$  ( $k$  ganz rational) und  $\nu = \alpha$  ist, hat man

$$P_\nu(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{w^{\frac{1}{2}\alpha}} \sum_{j=0}^{\left[\frac{k}{2}\right]} \frac{(-1)^j \prod_{h=0}^{2j-1} (4\nu^2 - (2h+1)^2)}{(2j)! (8w)^{2j}}.$$

**Satz 6.** Es sei  $\Re(\nu) = \alpha$ ,  $w \neq 0$ ,  $-\pi < \arg w < \pi$ ,  $\arg w^{\frac{1}{2}\alpha} = \frac{1}{2}\arg w$  und  $m$  ganz rational  $> \frac{1}{2}|\alpha| - \frac{3}{4}$ .

Behauptungen:

1. Falls  $\alpha + \frac{1}{2}$  nicht ganz rational ist, ist

$$Q_\nu(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{w^{\frac{1}{2}\alpha}} \left\{ \sum_{j=0}^{m-1} \frac{(-1)^{j+1} \prod_{h=0}^{2j} (4\nu^2 - (2h+1)^2)}{(2j+1)! (8w)^{2j+1}} + \theta_6 \frac{\cos \nu\pi}{\cos \alpha\pi} \frac{(-1)^{m+1} \prod_{h=0}^{2m} (4\alpha^2 - (2h+1)^2)}{(2m+1)! (8w)^{2m+1}} \right\},$$

worin  $\theta_6$  den Beziehungen genügt, die man bekommt, wenn man in (21), (22), (24), (26) und (27)  $\theta_3$  durch  $\theta_6$  und in (22), (23), (24) und (25)  $N$  durch  $m + \frac{1}{4}$  ersetzt.

2. Falls  $|a| = k + \frac{1}{2}$  ( $k$  ganz rational) und  $\nu \neq a$  ist, ist

$$Q_\nu(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{w^{\frac{1}{2}}} \left\{ \sum_{j=0}^{m-1} \frac{(-1)^{j+1} \prod_{h=0}^{2j} (4\nu^2 - (2h+1)^2)}{(2j+1)! (8w)^{2j+1}} + \right. \\ \left. \theta_6 \frac{(-1)^{m+k} (8k+4) \cos \nu\pi}{\pi (2m+1)! (8w)^{2m+1}} \prod_{\substack{h=0 \\ h \neq k}}^{2m} (4a^2 - (2h+1)^2) \right\},$$

worin  $\theta_6$  den Beziehungen genügt, die man bekommt, wenn man in (21), (22) und (24)  $\theta_3$  durch  $\theta_6$  und in (22), (23), (24) und (25)  $N$  durch  $m + \frac{1}{4}$  ersetzt.

3. Falls  $|a| = k + \frac{1}{2}$  ( $k$  ganz rational) und  $\nu = a$  ist, hat man

$$Q_\nu(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{w^{\frac{1}{2}}} \sum_{j=0}^{\left[\frac{k-1}{2}\right]} \frac{(-1)^{j+1} \prod_{h=0}^{2j} (4\nu^2 - (2h+1)^2)}{(2j+1)! (8w)^{2j+1}}.$$

### § 1. Die Integraldarstellungen von $H_\nu^{(1)}(w)$ und $H_\nu^{(2)}(w)$ .

Bekanntlich hat man, falls  $w \neq 0$  ist und  $\mu_1$  und  $\mu_2$  beliebige Zahlen sind, die den Bedingungen  $-\frac{\pi}{2} < \mu_1 < \frac{\pi}{2}$ ,  $-\frac{\pi}{2} < \mu_2 < \frac{\pi}{2}$  genügen, für beliebige komplexe Werte von  $\nu$  und beliebige Werte von  $\arg w$ <sup>1)</sup>

$$H_\nu^{(1)}(w) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty + i(\arg w + \mu_1)}^{\infty + i(\pi - \arg w + \mu_2)} e^{w \sinh z - \nu z} dz, \dots \quad (28)$$

$$H_\nu^{(2)}(w) = -\frac{1}{\pi i} \int_{-\infty + i(\arg w + \mu_1)}^{\infty + i(-\pi - \arg w + \mu_2)} e^{w \sinh z - \nu z} dz, \dots \quad (29)$$

Setzt man in (28)  $\mu_1 = -\mu_2 = -\mu$  und ersetzt man  $z$  durch  $z + \frac{\pi}{2}i$ , dann bekommt man

$$H_\nu^{(1)}(w) = \frac{e^{-\frac{1}{2}\nu\pi i}}{\pi i} \int_{-\infty - i\left(\frac{\pi}{2} - \arg w + \mu\right)}^{\infty + i\left(\frac{\pi}{2} - \arg w + \mu\right)} e^{iw \cosh z - \nu z} dz,$$

1) Herr WATSON (loc. cit., p. 179) gibt die Beziehungen (28) und (29) nur für den Fall, dass  $-\frac{3\pi}{2} < \arg w < \frac{3\pi}{2}$  ist; überdies ersetzt er  $z$  durch  $\log w$ . HOPF und SOMMERFELD (Archiv der Mathematik und Physik (3) 18 (1911) p. 4 und 5) geben (28) und (29) für beliebige Werte von  $\arg w$ ; sie ersetzen dabei  $z$  durch  $-it + i\frac{\pi}{2}$ .

also

$$H_{\nu}^{(1)}(w) = \frac{2e^{-\frac{1}{2}\nu\pi i}}{\pi i} \int_0^{\infty+i\left(\frac{\pi}{2}-\arg w+\mu\right)} e^{i w \cosh z} \cosh \nu z dz \left(-\frac{\pi}{2} < \mu < \frac{\pi}{2}\right). \quad (30)$$

Ebenso findet man, wenn man in (29)  $\mu_1 = -\mu_2 = -\mu$  setzt und  $z$  durch  $z - \frac{\pi}{2}i$  ersetzt,

$$H_{\nu}^{(2)}(w) = -\frac{2e^{\frac{1}{2}\nu\pi i}}{\pi i} \int_0^{\infty+i\left(-\frac{\pi}{2}-\arg w+\mu\right)} e^{-i w \cosh z} \cosh \nu z dz \left(-\frac{\pi}{2} < \mu < \frac{\pi}{2}\right). \quad (31)$$

Aus (30) und (31) ergibt sich noch

$$H_{\nu}^{(2)}(w) = -H_{\nu}^{(1)}(we^{\pi i}) \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (32)$$

## § 2. Hilfssätze.

**Hilfssatz 1.** Ist  $m$  ganz rational  $\geq 2$  und  $a \neq 0$ , so ist

$$\int_{(0+)} e^{\nu t} (\sinh at)^{-m-1} dt = \frac{\nu^2 - (m-1)^2 a^2}{m(m-1)a^2} \int_{(0+)} e^{\nu t} (\sinh at)^{-m+1} dt. \quad (33)$$

*Beweis:* Wir unterscheiden zwei Fälle.

1. Es sei  $\nu = 0$ . Man hat

$$\frac{d}{dt} ((\sinh at)^{-m} \cosh at) = -ma (\sinh at)^{-m-1} - (m-1)a (\sinh at)^{-m+1},$$

also

$$\int_{(0+)} (\sinh at)^{-m-1} dt = -\frac{m-1}{m} \int_{(0+)} (\sinh at)^{-m+1} dt.$$

Hiermit ist (33), falls  $\nu = 0$  ist, bewiesen.

2. Es sei  $\nu \neq 0$ . Wendet man zweimal partielle Integration an, dann erhält man

$$\begin{aligned} \int_{(0+)} e^{\nu t} (\sinh at)^{-m+1} dt &= (m-1) \frac{a}{\nu} \int_{(0+)} e^{\nu t} (\sinh at)^{-m} \cosh at dt = \\ &= (m-1) \frac{a^2}{\nu^2} \int_{(0+)} e^{\nu t} (-m(\sinh at)^{-m-1} - (m-1)(\sinh at)^{-m+1}) dt, \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} \int_{(0+)} e^{\nu t} (\sinh at)^{-m-1} dt &= \left(1 - (m-1)^2 \frac{a^2}{\nu^2}\right) \frac{\nu^2}{m(m-1)a^2} \int_{(0+)} e^{\nu t} (\sinh at)^{-m+1} dt \\ &= \frac{\nu^2 - (m-1)^2 a^2}{m(m-1)a^2} \int_{(0+)} e^{\nu t} (\sinh at)^{-m+1} dt. \end{aligned}$$

Hiermit ist (33) völlig bewiesen.

**Hilfssatz 2.** Ist  $m$  ganz rational  $\geq 0$  und  $a \neq 0$ , so hat man<sup>1)</sup>, falls  $m$  gerade ist,

$$\int_{(0+)} e^{\nu t} (\sinh at)^{-m-1} dt = \frac{2\pi i}{a^{m+1} m!} \prod_{h=0}^{\frac{m}{2}-1} (\nu^2 - (2h+1)^2 a^2) \quad \dots \quad (34)$$

und, falls  $m$  ungerade ist,

$$\int_{(0+)} e^{\nu t} (\sinh at)^{-m-1} dt = \frac{2\pi i}{a^{m+1} m!} \prod_{h=0}^{\frac{m-1}{2}-1} (\nu^2 - (2h+2)^2 a^2) \quad \dots \quad (35)$$

*Beweis.* Aus dem Residuensatz ergibt sich

$$\int_{(0+)} \frac{e^{\nu t} dt}{\sinh at} = \frac{2\pi i}{a} \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (36)$$

und

$$\int_{(0+)} \frac{e^{\nu t} dt}{(\sinh at)^2} = \frac{2\pi i}{a^2} \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (37)$$

Beziehung (34) folgt nun aus (33) und (36); Relation (35) aus (33) und (37).

**Hilfssatz 3.** Ist  $m$  eine gerade Zahl  $\geq 0$  und  $a \neq 0$ , so ist

$$\int_{(0+)} \cosh \nu t (\sinh at)^{-m-1} dt = \frac{2\pi i}{a^{m+1} m!} \prod_{h=0}^{\frac{m}{2}-1} (\nu^2 - (2h+1)^2 a^2); \quad (38)$$

ist  $m$  eine ungerade Zahl  $\geq 1$  und  $a \neq 0$ , so ist

$$\int_{(0+)} \sinh \nu t (\sinh at)^{-m-1} dt = \frac{2\pi i}{a^{m+1} m!} \prod_{h=0}^{\frac{m-1}{2}-1} (\nu^2 - (2h+2)^2 a^2) \quad (39)$$

*Beweis.* Wegen

$$\cosh \nu t = \frac{e^{\nu t} + e^{-\nu t}}{2}$$

und

$$\sinh \nu t = \frac{e^{\nu t} - e^{-\nu t}}{2},$$

folgt (38) aus Formel (34) von Hilfssatz 2 und (39) aus Formel (35) desselben Hilfssatzes.

<sup>1)</sup> Ein leeres Produkt wird gleich 1 gesetzt.

**Mathematics. — Ueber eine trigonometrische Summe.** Von J. POPKEN.  
(Communicated by Prof. J. G. VAN DER CORPUT.)

(Communicated at the meeting of May 28, 1932.)

Es seien  $a_1, a_2, \dots, a_n$   $n$  reelle Zahlen ( $n > 1$ ), so dass es eine positive Grösse  $\theta < 1$  gibt mit

$$\left. \begin{aligned} 0 < \theta &\leq \Delta a_v \leq 1 - \theta & (v = 1, 2, \dots, n-1), \\ 0 &\leq \Delta^2 a_v & (v = 1, 2, \dots, n-2). \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (1a)$$

Man betrachte die Summe

$$S' = \sum_{v=1}^n e^{2\pi i \alpha_v}.$$

Herr J. G. VAN DER CORPUT hat zum ersten Male bewiesen, dass es eine angebbare positive absolute Konstante  $A$  gibt, so dass

$$|S'| \leq \frac{A}{\theta}$$

ist. Später gab Herr KUSMIN hierfür einen elementar-geometrischen Beweis, und drückte die Zahl  $A$  auf 1 herunter. Schliesslich bewies Herr E. LANDAU mit analytischen Mitteln die noch schärfere Ungleichung

$$|S'| \leq \cot \frac{\pi \theta}{2} \quad \dots \quad (1)$$

Ich zeige hier an ersterer Stelle den folgenden ähnlichen Satz.

**Satz.** Es seien für  $n > 1$   $a_1, a_2, \dots, a_n$   $n$  Zahlen  $\geq 0$  mit

$$0 \leq \Delta a_v \quad (v = 1, 2, \dots, n-1); \quad \dots \quad (2a)$$

und weiter  $a_1, a_2, \dots, a_n$   $n$  reelle Zahlen, so dass es eine positive Grösse  $\theta \leq \frac{1}{4}$  gibt mit

$$\left. \begin{aligned} 0 < \theta &\leq \Delta a_v \leq \frac{1}{4} & (v = 1, 2, \dots, n-1), \\ 0 &\leq \Delta^2 a_v & (v = 1, 2, \dots, n-2), \\ 0 &\leq \Delta^3 a_v & (v = 1, 2, \dots, n-3); \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (2a)$$

<sup>1)</sup> Es wird  $\Delta a_v = a_{v+1} - a_v$ ,  $\Delta a_v = a_{v+1} - a_v$  ( $v = 1, 2, \dots, n-1$ );  $\Delta^2 a_v = \Delta(\Delta a_v) = a_{v+2} - 2a_{v+1} + a_v$  ( $v = 1, 2, \dots, n-2$ ) und  $\Delta^3 a_v = \Delta(\Delta^2 a_v)$  ( $v = 1, 2, \dots, n-3$ ) gesetzt. Für  $n \leq 3$  verschwindet die letzte Bedingung und für  $n \leq 2$  die zwei letzten Bedingungen von (2a), und ausserdem die letzte Bedingung in (1a).

<sup>2)</sup> Man vergl. E. LANDAU, Ueber eine trigonometrische Summe. Göttinger Nachrichten 1928, S. 21.

wird

$$S = \sum_{\nu=1}^n a_\nu e^{2\pi i \alpha_\nu} \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (3)$$

gesetzt, dann ist

$$|S| \leq a_1 \operatorname{cosec}(\pi \theta) \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (4)$$

und für  $S \neq 0$

$$2\pi a_1 - \pi \Delta a_1 < \operatorname{Arg} S < 2\pi a_1 - \pi \Delta a_1 + \pi. \quad \dots \quad \dots \quad (5)$$

**Bemerkung 1.** Die Bedingungen (1a) sind allgemeiner als die Bedingungen (2a); im Spezialfall mit  $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 1$  gilt also auch (1) mit  $S$  statt  $S'$ . Die Ungleichung (4) ist aber schärfer, denn wegen  $0 < \pi \theta \leq \frac{\pi}{4}$  ist

$$\operatorname{cosec}(\pi \theta) = \frac{1}{2 \sin \frac{\pi \theta}{2} \cos \frac{\pi \theta}{2}} = \frac{1}{2 \cos^2 \frac{\pi \theta}{2}} \cot \frac{\pi \theta}{2} \leq \cot \frac{\pi \theta}{2}.$$

**Bemerkung 2.** Ohne die Allgemeinheit zu schaden, können wir beim Beweis dieses Satzes annehmen, dass die Zahlen  $a_1, a_2, \dots, a_n$  alle von Null verschieden sind. Denn nehmen wir an, dass der Satz unter der letzten Bedingung schon bewiesen sei. Unter den Zahlen  $a_1, a_2, \dots, a_n$  verschwinde jetzt wenigstens eine, und es sei  $a_{m+1}$  die erste Zahl dieser Reihe, die gleich Null ist. Da wegen (2a)  $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_m \geq a_{m+1} \geq \dots \geq a_n \geq 0$  ist, gilt folglich  $a_{m+1} = a_{m+2} = \dots = a_n = 0$ , also ist

$$S_m = \sum_{\nu=1}^m a_\nu e^{2\pi i \alpha_\nu} = S^1;$$

kann man deshalb beweisen, dass (4) und (5) mit  $S_m$  statt  $S$  gelten, so ist der Satz allgemein bewiesen. Im Fall mit  $m=0$  ist  $a_1=0$  und es ist  $S_0$  leer, also  $S_0=0$ ; so dass dann (4) und (5) gelten mit  $S_0$  statt  $S$ . Im Fall mit  $m=1$  ist  $S_1 = a_1 e^{2\pi i \alpha_1}$ , also  $|S_1| = a_1 \leq a_1 \operatorname{cosec}(\pi \theta)$  und  $\operatorname{Arg} S_1 = 2\pi a_1$ , also wegen  $0 < \pi \Delta a_1 \leq \frac{\pi}{4}$  ist  $2\pi a_1 - \pi \Delta a_1 < \operatorname{Arg} S_1 < 2\pi a_1 - \pi \Delta a_1 + \pi$ , so dass dann (4) und (5) mit  $S_1$  statt  $S$  gelten. Im Fall mit  $m > 1$  kann man wegen  $a_1 \neq 0, a_2 \neq 0, \dots, a_m \neq 0$  nach der obigen Annahme den Satz auf die Summe  $S_m = \sum_{\nu=1}^m a_\nu e^{2\pi i \alpha_\nu}$  anwenden, so dass auch in diesem Fall die Beziehungen (4) und (5) mit  $S_m$  statt  $S$  gelten.

Um den Satz zu beweisen, führe ich einige neuen Größen ein. Man setze

$$S_0 = 0, \quad S_\nu = \sum_{\mu=1}^\nu a_\mu e^{2\pi i \alpha_\mu} \quad (\nu = 1, 2, \dots, n), \quad \text{also} \quad S_n = S. \quad \dots \quad (6)$$

Die entsprechenden Punkte in der GAUSSSchen Ebene werden gleichfalls mit  $S_0 = 0, S_1, \dots, S_n = S$  bezeichnet (man vergl. Fig. 1 und 2). Nach

<sup>1)</sup> Eine leere Summe wird gleich Null gesetzt.

(6) ist für  $v = 1, 2, \dots, n$   $S_v - S_{v-1} = a_v e^{2\pi i \alpha_v}$ , also  $\overline{S_{v-1} S_v} = |S_v - S_{v-1}| = a_v$ ; die Punkte  $S_v$  bilden folglich die Eckpunkte eines Streckenzuges von den Streckenlängen  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , wobei der Außenwinkel zwischen zwei aufeinander folgenden Strecken  $S_{v-1} S_v$  und  $S_v S_{v+1}$  offenbar gleich  $2\pi \Delta \alpha_v$  ( $v = 1, 2, \dots, n-1$ ) ist. Für  $v = 2, 3, \dots, n$  liege der Punkt  $S_v^*$  auf der geraden Linie  $S_{v-1} S_v$ , so dass  $\overline{S_{v-1} S_v^*} = \overline{S_{v-2} S_{v-1}}$  ist. Wegen (2a) ist  $a_v = \overline{S_{v-1} S_v} \leq a_{v-1} = \overline{S_{v-2} S_{v-1}}$ , also

$$\overline{S_{v-1} S_v} \equiv \overline{S_{v-1} S_v^*} \quad (v = 2, 3, \dots, n). \quad \dots \quad (7)$$

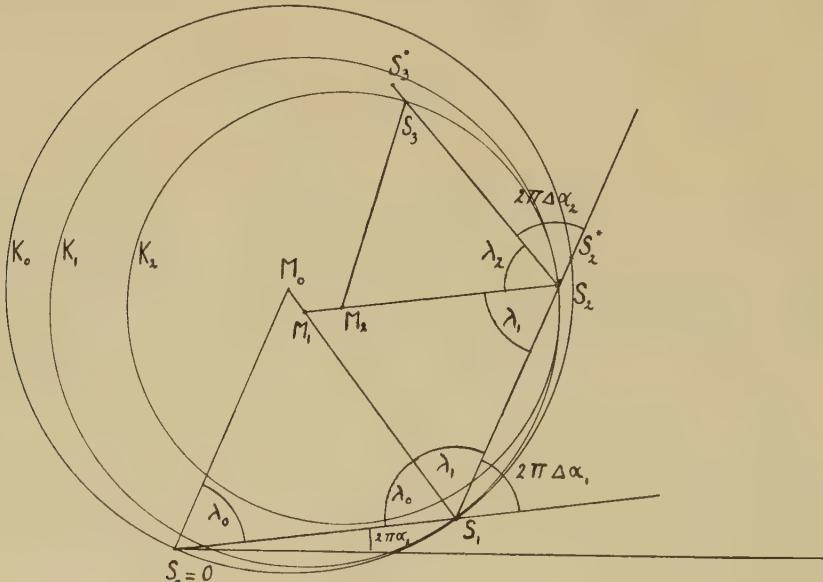


Fig. 1.

Durch die drei verschiedenen<sup>1)</sup> Punkte  $S_0 = 0$ ,  $S_1$  und  $S_2^*$  bringe man einen Kreis  $K_0$  (Fig. 1); für  $v = 1, 2, \dots, n-1$  definiere man  $K_v$  als den Kreis, der im Punkt  $S_v$  den Kreis  $K_{v-1}$  berührt und durch den Punkt  $S_{v+1}$  geht (Fig. 1 und 2); hierdurch sind die Kreise  $K_v$  festgelegt, denn  $S_1$  liegt auf dem Rand von  $K_0$ , und nach Bemerkung 2 dürfen wir annehmen, dass  $S_v$  und  $S_{v+1}$  ( $v = 1, 2, \dots, n-1$ ) nicht zusammenfallen, so dass die Definition stets einen Sinn hat<sup>2)</sup>.

Für  $v = 0, 1, \dots, n-1$  sei  $M_v$  der Mittelpunkt von  $K_v$ , während der Winkel  $M_v S_v S_{v+1}$  mit  $\lambda_v$  bezeichnet werde; der Winkel  $M_v S_{v+1} S_v$  ist gleich  $\lambda_v$ . Wegen  $\overline{S_0 S_1} = \overline{S_1 S_2^*} = a_1$  ist in Fig. 1

$$\lambda_0 = \lambda_1 = \frac{\pi}{2} - \pi \Delta \alpha_1 \quad \dots \quad (8)$$

<sup>1)</sup> Denn es ist  $n > 1$  und nach der Bemerkung 2 des Satzes dürfen wir annehmen, dass  $a_1 \neq 0$  ist.

<sup>2)</sup> Die gerade Linie wird auch zugelassen; dieser Fall tritt hier aber, wie gezeigt wird, nicht auf.

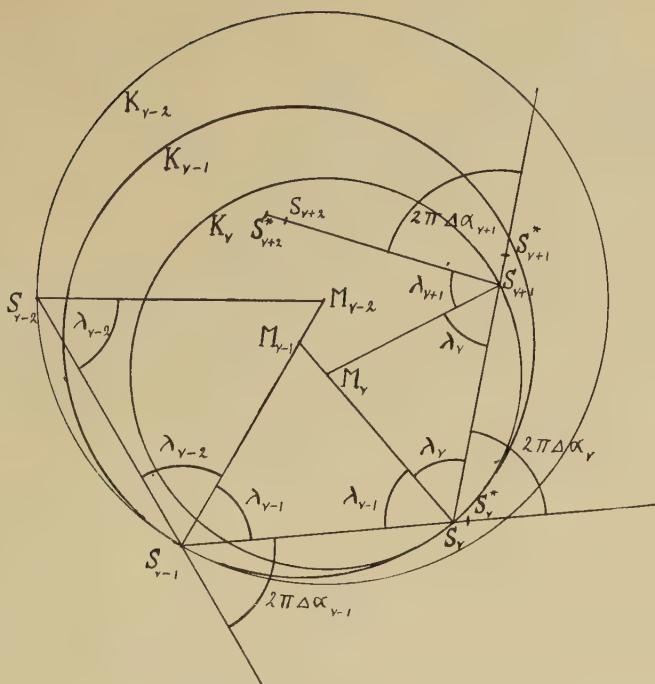


Fig. 2.

Bezeichnet man den Radius  $M_0 S_0$  von  $K_0$  mit  $R_0$ , so ist deshalb

$$R_0 \sin(\pi \Delta \alpha_1) = R_0 \cos \lambda_0 = \frac{a_1}{2},$$

also, mit Rücksicht auf  $0 < \pi \theta \leq \pi \Delta \alpha_1 \leq \frac{\pi}{4}$ ,

$$R_0 = \frac{a_1}{2} \operatorname{cosec}(\pi \Delta \alpha_1) \leq \frac{a_1}{2} \operatorname{cosec}(\pi \theta) \dots \quad (9)$$

Es ist offenbar, wegen (8),

$$\operatorname{Arg.} M_0 = 2\pi a_1 + \lambda_0 = 2\pi a_1 + \frac{\pi}{2} - \pi \Delta \alpha_1,$$

also, da der Kreis  $K_0$  durch den Ursprung geht, gilt für jeden Punkt  $P$  im Innern oder auf dem Rand von  $K_0$ , der nicht mit dem Ursprung zusammenfällt,

$$2\pi a_1 - \pi \Delta \alpha_1 < \operatorname{Arg.} P < 2\pi a_1 - \pi \Delta \alpha_1 + \pi \dots \quad (10)$$

Es sei  $t_\nu$  die gemeinsame Tangente von  $K_\nu$  und  $K_{\nu-1}$  im Punkt  $S_\nu$  ( $\nu = 1, 2, \dots, n-1$ ). Wird  $t_\nu$  durch  $S_\nu$  in die zwei Stücke  $t_\nu^-$  und  $t_\nu^+$  zerteilt, so dass  $S_{\nu-1}$  im Innern oder auf dem Rand des Kwadrantes  $t_\nu^- S_\nu M_{\nu-1}$  liegt, so liegt  $S_{\nu+1}$  im Innern vom Kwadrant  $t_\nu^+ S_\nu M_{\nu-1}$ . Denn für  $\nu = 1$  ist dieses klar; nehmen wir also an, dass  $\nu > 1$  ist, und dass dieses schon für jedes kleinere  $\nu$  bewiesen ist, also ist

$$2\pi \Delta \alpha_{\nu-1} > t_{\nu-1}^+ S_{\nu-1} S_\nu = t_\nu^- S_\nu S_{\nu-1} = t_\nu^+ S_\nu S_\nu^*,$$

wegen (2a) ist folglich

$$\frac{\pi}{2} \geq 2\pi \Delta a_v \geq 2\pi \Delta a_{v-1} > t_v^+ S_v S_v^{*1}).$$

Hieraus folgt, dass  $S_{v+1}$  in dem genannten Kwadrant liegt.

Eine unmittelbare Folgerung davon ist

$$\lambda_{v-1} + \lambda_v + 2\pi \Delta a_v = \pi \quad (v = 1, 2, \dots, n-1)$$

(man vergl. Fig. 2).

**Hilfssatz 1.** Unter den Bedingungen (2a) und (2a) liegen für jedes  $m = 0, 1, \dots, n-2$  die Punkte  $S_{m+2}^*, S_{m+3}^*, \dots, S_n^*$  und auch die Punkte  $S_m, S_{m+1}, \dots, S_n$  alle im Innern oder auf der Peripherie des Kreises  $K_m$ .

**Beweis.** Ich zeige dazu erst, dass  $S_{v+2}^*$  im Innern oder auf dem Rand von  $K_v$  liegt ( $v = 0, 1, \dots, n-2$ ); oder, was wegen  $\overline{S_v S_{v+1}} = \overline{S_{v+1} S_{v+2}^*}$  dasselbe ist (man beachte Fig. 2), dass stets

$$\lambda_{v+1} \leq \lambda_v \quad (v = 0, 1, \dots, n-2) \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (11)$$

gilt.

Für  $v = 0$  folgt das aus (8). Weiter ist (Fig. 1)

$$\lambda_0 + \lambda_1 + 2\pi \Delta a_1 = 2\lambda_1 + 2\pi \Delta a_1 = \pi, \quad \lambda_1 + \lambda_2 + 2\pi \Delta a_2 = \pi,$$

also wegen  $\Delta^2 a_1 = \Delta a_2 - \Delta a_1 \geq 0$  ist

$$\lambda_2 - \lambda_1 \leq 0,$$

so dass (11) auch mit  $v = 1$  gilt. Es sei jetzt  $2 \leq v \leq n-2$ , wobei ich annehme, dass (11) schon für jedes kleinere  $v$  bewiesen sei. Folglich ist

$$\Delta \lambda_{v-2} \leq 0 \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (12)$$

Aus Fig. 2 folgt unmittelbar:

$$\begin{aligned} \lambda_{v-2} + \lambda_{v-1} &+ 2\pi \Delta a_{v-1} = \pi, \\ -2\lambda_{v-1} - 2\lambda_v &- 4\pi \Delta a_v = -2\pi, \\ \lambda_v + \lambda_{v+1} + 2\pi \Delta a_{v+1} &= \pi, \end{aligned}$$

also durch Addition

$$\lambda_{v-2} - \lambda_{v-1} - \lambda_v + \lambda_{v+1} + 2\pi \Delta^3 a_{v-1} = 0;$$

folglich ist wegen  $\Delta^3 a_{v-1} \geq 0$

$$-\Delta \lambda_{v-2} + \Delta \lambda_v \leq 0,$$

also, mit Rücksicht auf (12),

$$\Delta \lambda_v \leq \Delta \lambda_{v-2} \leq 0,$$

womit (11) bewiesen ist.

Da also  $S_{v+2}^*$  im Innern oder auf dem Rand und  $S_{v+1}$  auf dem Rand von  $K_v$  liegt, liegt nach (7) mit  $v+2$  statt  $v$  auch  $S_{v+2}$  im Innern oder auf dem Rand von  $K_v$ ; nach der Definition ist  $K_{v+1}$  der Kreis, der im

<sup>1)</sup> Mit  $S_v S_v^*$  wird auch im Fall mit  $S_v = S_v^*$  die Verlängerung von  $S_{v-1} S_v$  gemeint.

Punkt  $S_{\nu+1}$  den Kreis  $K$ , berührt und durch  $S_{\nu+2}$  geht; folglich umfasst der Kreis  $K$ , stets den Kreis  $K_{\nu+1}$ , worunter ich versteh, dass jeder Punkt im Innern oder auf dem Rand von  $K_{\nu+1}$  auch im Innern oder auf dem Rand von  $K$ , liegt ( $\nu = 0, 1, \dots, n-2$ ).

Hieraus folgt, dass  $K_m$  alle Kreise  $K_{m+1}, K_{m+2}, \dots, K_{n-1}$  umfasst, so dass, mit Rücksicht auf das Obige, alle Punkte  $S_{m+2}^*, S_{m+3}^*, \dots, S_n^*$  im Innern oder auf dem Rand von  $K_m$  liegen. Dasselbe gilt für die Punkte  $S_{m+2}, S_{m+3}, \dots, S_n$ , während  $S_m$  und  $S_{m+1}$  nach der Definition von  $K_m$  auf der Peripherie von  $K_m$  liegen. Hiermit ist der Hilfssatz gezeigt worden.

**Beweis des Satzes.** Aus dem vorigen Hilfssatz mit  $m=0$  folgt, dass  $S = S_n$  im Innern oder auf dem Rand vom  $K_0$  liegt. Da  $K_0$  durch den Ursprung geht und den Radius  $R_0$  besitzt, gilt wegen (9)

$$|S| \leq 2R_0 \leq a_1 \operatorname{cosec}(\pi\theta),$$

womit (4) bewiesen ist. Weiter folgt (5) aus (10) mit  $S$  statt  $P$ .

In der zitierten Arbeit beweist Herr E. LANDAU, dass in (1) die rechte Seite nicht durch einen kleineren Ausdruck ersetzt werden kann. In Anschluss damit zeige ich hier die drei folgenden Zusätze.

**Zusatz 1.** *Notwendig und hinreichend dafür, dass unter den Bedingungen (2a), (2a) und  $a_\nu \neq 0$  ( $\nu = 1, 2, \dots, n, n > 1$ ; man vergl. hierzu Bemerkung 2 des Hauptsatzes) die Summe  $S$  in (3) verschwindet, ist, dass  $S$  die Form*

$$S = e^{2\pi i \alpha_1} \sum_{\nu=1}^n a_\nu e^{2(\nu-1)\pi i \Delta \alpha_1}. \quad \dots \quad (13)$$

hat, mit erstens

$$a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n > 0, \quad \dots \quad (14)$$

wo

$$a_\nu > a_{\nu+1} (\nu = 1, 2, \dots, n-1). \quad \dots \quad (14a)$$

nur dann auftreten kann, wenn  $\nu \Delta \alpha_1$  ganz rational ist, und zweitens mit

$$0 < \theta \leq \Delta \alpha_1 \leq \frac{1}{4} \text{ und } n \Delta \alpha_1 \text{ ganz rational.} \quad \dots \quad (15)$$

**Bemerkung.** Gelten also die Bedingungen (2a), (2a) und  $a_\nu \neq 0$  ( $\nu = 1, 2, \dots, n; n > 1$ ), während  $\Delta \alpha_1$  irrational ist, so ist  $S \neq 0$ .

**Zusatz 2.** *Für eine Summe  $S = \sum_{\nu=1}^n a_\nu e^{2\pi i \alpha_\nu}$  mit (2a), (2a) und  $a_\nu \neq 0$  ( $\nu = 1, 2, \dots, n; n > 1$ ) gilt  $|S| = a_1 \operatorname{cosec}(\pi\theta)$ , tritt also in (4) das Gleichheitszeichen auf, dann und nur dann, wenn  $S$  die Form*

$$S = e^{2\pi i \alpha_1} \sum_{\nu=1}^n a_\nu e^{2(\nu-1)\pi i \theta}. \quad \dots \quad (16)$$

hat, mit  $0 < \theta \leq \frac{1}{4}$ ,  $n \theta + \frac{1}{2}$  ganz rational, und mit

$$a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n > 0,$$

wo  $a_v > a_{v+1}$  ( $v = 1, 2, \dots, n-1$ ) nur dann auftreten kann, wenn  $v\theta + \frac{1}{2}$  ganz rational ist.

**Bemerkung.** Ist  $\theta$  eine positive rationale Zahl  $\leq \frac{1}{4}$ , so kann man also die natürliche Zahl  $n > 1$ , die positiven Zahlen  $a_1, a_2, \dots, a_n$  und die reellen Zahlen  $a_1, a_2, \dots, a_n$  stets so wählen, dass (2a) und (2a) erfüllt sind und dass in (4) das Gleichheitszeichen gilt. Ist aber  $\theta \leq \frac{1}{4}$  eine positive Irrationalzahl, so gilt immer für  $n > 1$

$$|S| < a_1 \operatorname{cosec}(\pi\theta).$$

In diesem Fall hat man aber:

**Zusatz 3.** Es sei  $\theta$  eine positive Irrationalzahl  $\leq \frac{1}{4}$ , und es sei  $\varepsilon$  irgend eine positive Zahl, dann kann man stets eine natürliche Zahl  $n > 1$ ,  $n$  positive Zahlen  $a_1, a_2, \dots, a_n$  und  $n$  reelle Zahlen  $a_1, a_2, \dots, a_n$  so bestimmen, dass (2a) und (2a) erfüllt sind und dass

$$|S| > a_1 \operatorname{cosec}(\pi\theta) - \varepsilon \dots \dots \dots \quad (17)$$

gilt.

Ich leite dazu erst zwei Hilfssätze ab.

**Hilfssatz 2.** Gilt für  $1 \leq m \leq n$  ( $n > 1$ )

$$a_1 = a_2 = \dots = a_m > 0$$

und

$$0 < \Delta a_1 = \Delta a_2 = \dots = \Delta a_{m-1} \leq \frac{1}{4}$$

so dass die Bedingungen (2a) und (2a) offenbar erfüllt sind für jedes  $\theta$  mit  $0 < \theta \leq \Delta a_1$ , dann liegen die Punkte  $S_0 = 0, S_1, \dots, S_m$  auf dem Rand des Kreises  $K_0$ , während die Winkel  $S_{v-1} M_0 S_v$  alle gleich  $2\pi \Delta a_1$  sind ( $v = 1, 2, \dots, m$ ). Liegen umgekehrt unter den Bedingungen (2a), (2a) und  $a_v \neq 0$  ( $v = 1, 2, \dots, n$ ;  $n > 1$ ) die Punkte  $S_0, S_1, \dots, S_m$  ( $1 \leq m \leq n$ ) auf der Peripherie von  $K_0$ , dann ist

$$a_1 = a_2 = \dots = a_m > 0 \text{ und } 0 < \Delta a_1 = \Delta a_2 = \dots = \Delta a_{m-1} \leq \frac{1}{4}. \quad (18)$$

**Beweis.** Der erste Teil des Satzes folgt sofort aus Fig. 1 und 2. Um den zweiten Teil zu beweisen, nehme ich an, dass die Punkte  $S_0 = 0, S_1, \dots, S_m$  auf der Peripherie von  $K_0$  liegen. Dann liegen wegen (7) folglich die Punkte  $S_2^*, S_3^*, \dots, S_m^*$  alle ausserhalb oder auf dem Rand von  $K_0$ ; nur im Fall mit

$$S_2^* = S_2, \quad S_3^* = S_3, \quad \dots \quad S_m^* = S_m \quad \dots \dots \dots \quad (19)$$

liegen alle Punkte  $S_2^*, S_3^*, \dots, S_m^*$  auf dem Rand von  $K_0$ . Nach Hilfssatz 1 mit  $m = 0$  liegen diese Punkte aber im Innern oder auf dem Rand von  $K_0$ , so dass notwendig (19) gelten muss. Nach der Definition von  $S_{v+1}^*$  ist  $\overline{S_{v-1} S_v} = \overline{S_v S_{v+1}^*}$ , also, da wegen (19)  $S_{v+1} = S_{v+1}^*$  ist,

$$a_{v+1} - a_v = \overline{S_v S_{v+1}} - \overline{S_{v-1} S_v} = \overline{S_v S_{v+1}^*} - \overline{S_v S_{v+1}^*} = 0 \quad (v = 1, 2, \dots, m-1),$$

und folglich, da  $S_0, S_1, S_2, \dots, S_m$  auf dem Rand von  $K_0$  liegen

$$\Delta a_1 = \Delta a_2 = \dots = \Delta a_{m-1},$$

womit der Hilfssatz bewiesen ist.

**Hilfssatz 3.** *Es liege unter den Bedingungen (2a), (2a) und  $a_\nu \neq 0$  ( $\nu = 1, 2, \dots, n; n > 1$ )  $S$  auf der Peripherie von  $K_0$ . Wenn alle Punkte  $S_0, S_1, \dots, S_n$  auf dem Rand von  $K_0$  liegen, so setze man  $m = n$ ; sonst sei  $S_{m+1}$  der erste Punkt dieser Reihe, der nicht mehr auf dem Rand von  $K_0$  liegt, dann ist*

$$S_m = S. \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (20)$$

**Beweis.** Im Fall mit  $m = n$  ist der Satz trivial. Es sei deshalb  $m < n$ . Nach Hilfssatz 1 mit  $m = 0$  liegt  $S_{m+1}$  im Innern oder auf der Peripherie von  $K_0$  und nach der Definition von  $m$  liegt dieser Punkt nicht mehr auf dem Rand von  $K_0$ , also muss  $S_{m+1}$  notwendig im Innern von  $K_0$  liegen, während die Punkte  $S_0, S_1, \dots, S_m$  alle auf dem Rand von  $K_0$  liegen.  $K_m$  ist der Kreis, der im Punkt  $S_m$  den Kreis  $K_{m-1}$ , also den Kreis  $K_0$ , berührt, und durch  $S_{m+1}$  geht. Daher hat der Rand von  $K_0$  mit dem Innern oder dem Rand von  $K_m$  nur den Berührungsrand  $S_m$  gemeinsam. Nun liegt  $S$  nach der Voraussetzung auf dem Rand von  $K_0$  und nach Hilfssatz 1 im Innern oder auf dem Rand von  $K_m$ . Also muss  $S$  mit dem Berührungsrand  $S_m$  zusammenfallen, womit (20) bewiesen ist.

**Beweis von Zusatz 1.** 1. *Hat  $S$  die Form (13) mit (14), (14a) und (15), so sind (2a), (2a) und  $a_\nu \neq 0$  ( $\nu = 1, 2, \dots, n; n > 1$ ) erfüllt, und ist  $S$  gleich Null.*

**Beweis.** Aus (14) folgt (2a) und  $a_\nu \neq 0$  ( $\nu = 1, 2, \dots, n$ ); nach (13) ist

$$a_\nu = a_1 + (\nu - 1) \Delta a_1 \quad (\nu = 1, 2, \dots, n),$$

mit Rücksicht auf (15) ist also  $0 < \theta \leq \Delta a_1 = \Delta a_\nu \leq \frac{1}{4}$ , und hieraus folgt (2a); wegen (15) ist weiter  $0 < \Delta a_1 \leq \frac{1}{4}$  und  $n \Delta a_1$  ganz rational, so dass  $n > 1$  ist. Es gelte (14a) für  $\nu = \nu_1, \nu_2, \dots, \nu_{l-1}$  mit  $0 < \nu_1 < \nu_2 < \dots < \nu_{l-1} < n$ ; wird  $\nu_0 = 0, \nu_l = n$  gesetzt, so ist

$$S = e^{2\pi i \alpha_1} \sum_{\lambda=0}^{l-1} a_{\nu_{\lambda}+1} \sum_{\nu=\nu_{\lambda}+1}^{\nu_{\lambda}+1} e^{2(\nu-1)\pi i \Delta a_1},$$

wobei die Zahlen  $\nu_\lambda \Delta a_1$  ( $\lambda = 0, 1, \dots, l-1$ ) alle ganz rational sind, so dass wegen  $\Delta a_1 > 0$  jede Summe

$$\sum_{\nu=\nu_{\lambda}+1}^{\nu_{\lambda}+1} e^{2(\nu-1)\pi i \Delta a_1} \quad (\lambda = 0, 1, \dots, l-1)$$

verschwindet, und  $S$  folglich gleich Null ist.

2. Verschwindet  $S$  unter den Bedingungen (2a), (2a) und  $a_v \neq 0$  ( $v = 1, 2, \dots, n$ ;  $n > 1$ ), so hat  $S$  die Form (13) mit (14), (14a) und (15).

Beweis. Es werde  $m$  wie in Hilfssatz 3 definiert; die Punkte  $S_0, S_1, \dots, S_m$  liegen also alle auf dem Rand von  $K_0$ ; nach (18) von Hilfssatz 2 ist folglich

$$a_1 = a_2 = \dots = a_m > 0, \quad \Delta a_v = \Delta a_1 \quad (v = 1, 2, \dots, m-1),$$

so dass  $S_m$  die Form

$$S_m = a_1 e^{2\pi i \alpha_1} \sum_{v=1}^m e^{2(v-1)\pi i \Delta a_1}, \quad \dots \quad (21)$$

hat.

Nach Hilfssatz 3 ist, da  $S$  verschwindet und folglich auf dem Rand von  $K_0$  liegt,

$$S_m = S = 0, \quad \dots \quad (22)$$

Aus (21) und (22) folgt

$$m \Delta a_1 \text{ ganz rational.} \quad \dots \quad (23)$$

Im Fall mit  $m = n$  folgt der zu beweisende Satz sofort aus (21) und (23). Ich kann folglich annehmen, dass  $n - m > 0$  ist und dass der Satz schon für jedes kleinere  $n - m$  bewiesen ist. Es ist dann sogar  $n - m > 1$ , denn im Fall mit  $n - m = 1$ , würde nach der Definition von  $m$   $S_{m+1} = S = 0$  nicht auf der Peripherie von  $K_0$  liegen.

Aus (22) folgt

$$S - S_m = \sum_{v=m+1}^n a_v e^{2\pi i \alpha_v} = 0, \quad \dots \quad (24)$$

Die hier auftretende Summe

$$\sum_{v=m+1}^n a_v e^{2\pi i \alpha_v} \quad \dots \quad (25)$$

erfüllt die Bedingungen (2a), (2a) und  $a_v \neq 0$  ( $v = 1, 2, \dots, n$ ;  $n > 1$ ), wenn darin  $a_1, a_2, \dots, a_n$  durch  $a_{m+1}, a_{m+2}, \dots, a_n$  und  $a_1, a_2, \dots, a_n$  durch  $a_{m+1}, a_{m+2}, \dots, a_n$ , also  $n$  durch  $n - m$ , ersetzt wird. Da  $m$  stets eine positive Zahl ist, muss hierbei  $n - m$  durch eine kleinere Zahl ersetzt werden, so dass ich, nach der Induktionsannahme, der zu beweisende Satz auf die Summe (25) statt auf  $S$  anwenden darf. Folglich ist

$$S - S_m = e^{2\pi i \alpha_{m+1}} \sum_{v=1}^{n-m} a_{m+v} e^{2(v-1)\pi i \Delta a_{m+1}}, \quad \dots \quad (26)$$

mit

$$a_{m+1} \geq a_{m+2} \geq \dots \geq a_n > 0, \quad \dots \quad (27)$$

wo

$$a_{m+v} > a_{m+v+1} \quad (v = 1, 2, \dots, n-m-1), \quad \dots \quad (28)$$

nur dann auftreten kann, wenn  $\nu \Delta a_{m+1}$  ganz rational ist, und mit

$$(n-m) \Delta a_{m+1} \text{ ganz rational. . . . .} \quad (29)$$

Wir haben schon gezeigt, dass  $n-m \geq 2$  ist; es ist sogar

$$n-m \geq 3,$$

denn sonst wäre im Fall mit  $n-m=2$ :  $S_{m+2}=S_n=0$  und wegen (22) ist  $S_m=0$ , also  $a_{m+1} e^{2\pi i \alpha_{m+1}} + a_{m+2} e^{2\pi i \alpha_{m+2}} = 0$ ; das ist aber wegen  $a_{m+1} \neq 0$  und  $0 < 2\pi \Delta a_{m+1} \leq \frac{\pi}{2}$  nicht möglich.

Mit Rücksicht auf (24) und (26) bestehen folglich  $\Delta a_{m+1}$  und  $\Delta a_{m+2}$ , und ist

$$\Delta a_{m+1} = \Delta a_{m+2}, \text{ also } \Delta^2 a_{m+1} = 0,$$

aus (2a) folgt ausserdem  $0 \leq \Delta^2 a_1 \leq \Delta^2 a_2 \leq \dots \leq \Delta^2 a_{m+1}$ , also  $\Delta^2 a_1 = \Delta^2 a_2 = \dots = \Delta^2 a_{m+1} = 0$ , oder  $\Delta a_v = \Delta a_1$  ( $v=1, 2, \dots, m+2$ ).

Insbesondere ist  $\Delta a_{m+1} = \Delta a_1$  und  $a_{m+1} = a_1 + m \Delta a_1$ , so dass (26), (27) und (28) übergehen in

$$S - S_m = e^{2\pi i \alpha_1 + 2\pi i m \Delta a_1} \sum_{v=1}^{n-m} a_{m+v} e^{2(v-1)\pi i \Delta a_1} = e^{2\pi i \alpha_1} \sum_{v=m+1}^n a_v e^{2(v-1)\pi i \Delta a_1}, \quad (30)$$

mit

$$a_{m+1} \geq a_{m+2} \geq \dots \geq a_n > 0,$$

wo  $a_v > a_{v+1}$  ( $v=m+1, m+2, \dots, n-1$ ) nur dann auftreten kann, wenn  $(v-m) \Delta a_1$  ganz rational ist, also wegen (23) nur dann, wenn  $\nu \Delta a_1$  ganz rational ist.

Aus (23), (29) und  $\Delta a_{m+1} = \Delta a_1$  folgt, dass  $m \Delta a_1$  und dass  $n \Delta a_1$  ganz rational sind. Nach (21) und (30) ist mit Rücksicht auf die letzten Ergebnisse

$$S = a_1 e^{2\pi i \alpha_1} \sum_{v=1}^m e^{2(v-1)\pi i \Delta a_1} + e^{2\pi i \alpha_1} \sum_{v=m+1}^n a_v e^{2(v-1)\pi i \Delta a_1} = e^{2\pi i \alpha_1} \sum_{v=1}^n a_v e^{2(v-1)\pi i \Delta a_1},$$

mit  $a_1 = a_2 = \dots = a_m \geq a_{m+1} \geq a_{m+2} \geq \dots \geq a_n > 0$ , wo  $a_v > a_{v+1}$  ( $v=1, 2, \dots, n-1$ ) nur auftreten kann, wenn  $v \Delta a_1$  ganz rational ist, wo  $n \Delta a_1$  ganz rational ist und  $0 < \theta \leq \Delta a_1 \leq \frac{1}{4}$  gilt.  $S$  hat also die Form (13), während auch (14), (14a) und (15) erfüllt sind. Hiermit ist Zusatz 1 bewiesen.

**Beweis von Susatz 2.** *Erster Schritt:* Hat  $S$  die Form (16), so sind (2a), (2a) und  $a_v \neq 0$  ( $v=1, 2, \dots, n$ ;  $n > 1$ ) erfüllt, und ist

$$|S| = a_1 \cosec(\pi \theta), \dots \dots \dots \quad (31)$$

so dass also in diesem Fall in (4) das Gleichheitszeichen gilt.

*Beweis.* Es ist klar, dass dann die Bedingungen (2a), (2a) und  $a_v \neq 0$

$(v=1, 2, \dots, n)$  erfüllt sind. Weiter ist  $0 < \theta \leq \frac{1}{4}$  und  $n\theta + \frac{1}{2}$  ganz rational, so dass  $n \geq 2$  ist.

Es sei  $m$  die kleinste natürliche Zahl, so dass  $m\theta + \frac{1}{2}$  ganz rational ist; da  $n\theta + \frac{1}{2}$  ganz rational ist, besteht diese Zahl, und ist  $2 \leq m \leq n$ . Aus der Form des Ausdrucks (16) folgt dann, dass  $a_1 = a_2 = \dots = a_m > 0$  ist, und dass also

$$S_m = a_1 e^{2\pi i \alpha_1} \sum_{v=1}^m e^{2(v-1)\pi i \theta}$$

ist. Nach dem ersten Teil von Hilfssatz 2 liegen folglich die Punkte  $S_0, S_1, \dots, S_m$  alle auf der Peripherie von  $K_0$ , während die Winkel  $S_{v-1} M_0 S_v$  ( $v=1, 2, \dots, m$ ) alle gleich  $2\pi\theta$  sind. Da  $m\theta + \frac{1}{2}$  ganz rational ist, ist der Winkel  $0 M_0 S_m = S_0 M_0 S_m = m \cdot 2\pi\theta = \pi \pmod{2\pi}$ , so dass  $S_m$  in dem zu dem Ursprung diametralen Punkt des Kreises  $K_0$  liegt; wegen (9) ist also

$$|S_m| = 2R_0 = a_1 \operatorname{cosec}(\pi \Delta \alpha_1) = a_1 \operatorname{cosec}(\pi \theta) \quad \dots \quad (32)$$

Ist  $m = n$ , so folgt der Satz schon aus (32). Es sei deshalb  $m < n$ ; dann ist, da  $(n-m)\theta = n\theta + \frac{1}{2} - (m\theta + \frac{1}{2})$  ganz rational ist, wegen  $0 < \theta \leq \frac{1}{4}$  sogar  $n-m \geq 4$ . Man betrachte die Summe

$$S - S_m = e^{2\pi i \alpha_1} \sum_{v=1}^{n-m} a_{m+v} e^{2(m+v-1)\pi i \theta} = e^{2\pi i (\alpha_1 + m\theta)} \sum_{v=1}^{n-m} a_{m+v} e^{2(v-1)\pi i \theta}, \quad (33)$$

hierin ist  $a_{m+1} \geq a_{m+2} \geq \dots \geq a_n > 0$ , wo offenbar  $a_{m+v} > a_{m+v+1}$  nur dann gelten kann, wenn  $v\theta = (m+v)\theta + \frac{1}{2} - (m\theta + \frac{1}{2})$  ganz rational ist; ersetzt man in Zusatz 1 die Zahlen  $a_1, a_2, \dots, a_n$  durch  $a_{m+1}, a_{m+2}, \dots, a_n$ , also  $n$  durch  $n-m$ , so erkennt man, dass die Summe (33) die Form (13) mit  $\alpha_1 + m\theta$  statt  $\alpha_1$  hat, wobei (14), (14a) und (15) erfüllt sind; hieraus folgt, dass  $S - S_m$  verschwindet.

Mit Rücksicht auf (32) folgt also die Beziehung (31).

*Zweiter Schritt:* Gilt unter den Voraussetzungen (2a), (2a) und  $a_v \neq 0$  ( $v=1, 2, \dots, n; n > 1$ ) für die Summe  $S = \sum_{v=1}^n a_v e^{2\pi i \alpha_v}$  die Beziehung (31), so hat  $S$  die Form (16).

*Beweis.* Nach Hilfssatz 1 mit  $m=0$  liegt  $S = S_n$  im Innern oder auf dem Rand von  $K_0$ , wobei  $K_0$  durch den Ursprung geht und den Radius  $R_0$  besitzt; wegen (9) ist also  $|S| \leq 2R_0 = a_1 \operatorname{cosec}(\pi \Delta \alpha_1)$ , so dass mit Rücksicht auf  $0 < \pi \theta \leq \pi \Delta \alpha_1 \leq \frac{\pi}{4}$  (31) nur gelten kann, wenn

$$\Delta \alpha_1 = \theta \quad \dots \quad (34)$$

ist und, wenn ausserdem  $S$  in dem zu dem Ursprung diametralen Punkt  $P$  des Kreises  $K_0$  liegt. Insbesondere liegt  $S$  dann auf der Peripherie

von  $K_0$ , so dass, wenn  $m$  wie in Hilfssatz 3 definiert wird, nach diesem Hilfssatz

$$S_m = S = P \cdot \dots \cdot \dots \cdot \dots \cdot \dots \cdot \dots \quad (35)$$

ist.

Die Punkte  $S_0, S_1, \dots, S_m$  liegen dabei alle auf dem Rand von  $K_0$ , so dass nach (18) von Hilfssatz 2 und (34)  $S_m$  die Form

$$S_m = a_1 e^{2\pi i \alpha_1} \sum_{\nu=1}^m e^{2(\nu-1)\pi i \theta} \cdot \dots \cdot \dots \cdot \dots \cdot \dots \quad (36)$$

hat, und der Winkel  $0 M_0 S_m = S_0 M_0 S_m \equiv m \cdot 2\pi \Delta \alpha_1 \pmod{2\pi}$  ist, also wegen (34),  $\equiv 2m\pi\theta \pmod{2\pi}$  ist; mit Rücksicht auf (35) ist folglich

$$m\theta + \frac{1}{2} \text{ ganz rational} \cdot \dots \cdot \dots \cdot \dots \cdot \dots \quad (37)$$

Ist  $m = n$ , so folgt der zu beweisende Satz schon aus (36) und (37). Ich kann also annehmen, dass  $m < n$  ist; dann ist sogar  $m < n - 1$ , da sonst im Fall mit  $m = n - 1$  nach der Definition von  $m$   $S_{m+1} = S_n = S$  nicht mehr auf dem Rand von  $K_0$  liegen würde.

Man betrachte die Summe

$$S - S_m = \sum_{\nu=m+1}^n a_\nu e^{2\pi i \alpha_\nu} \cdot \dots \cdot \dots \cdot \dots \cdot \dots \quad (38)$$

ersetzt man in den Bedingungen (2a), (2a) und  $a_\nu \neq 0$  ( $\nu = 1, 2, \dots, n$ ;  $n > 1$ ) die Zahlen  $a_1, a_2, \dots, a_n$  durch  $a_{m+1}, a_{m+2}, \dots, a_n$  und die Zahlen  $a_1, a_2, \dots, a_n$  durch  $a_{m+1}, a_{m+2}, \dots, a_n$ , also  $n$  durch  $n - m$ , so sind diese Bedingungen offenbar erfüllt. Wegen (35) verschwindet  $S - S_m$ . Man kann deshalb den einen Teil des Zusatzes 1 auf die Summe (38) anwenden, und findet dann:

$$S - S_m = e^{2\pi i \alpha_{m+1}} \sum_{\nu=m+1}^n a_\nu e^{2(\nu-m-1)\pi i \Delta \alpha_{m+1}} \cdot \dots \cdot \dots \quad (39)$$

mit

$$a_{m+1} \geq a_{m+2} \geq \dots \geq a_n > 0, \cdot \dots \cdot \dots \quad (40)$$

wo

$$a_\nu > a_{\nu+1} (\nu = m+1, m+2, \dots, n-1) \cdot \dots \cdot \dots \quad (41)$$

höchstens dann auftreten kann, wenn  $(\nu - m) \Delta \alpha_{m+1}$  ganz rational ist, und weiter mit

$$0 < \theta \leq \Delta \alpha_{m+1} \leq \frac{1}{4}, (n-m) \Delta \alpha_{m+1} \text{ ganz rational} \cdot \cdot \cdot \quad (42)$$

Aus (42) folgt  $n - m \geq 4$ , also bestehen  $\Delta \alpha_{m+1}$  und  $\Delta \alpha_{m+2}$ , und gilt  $\Delta \alpha_{m+1} = \Delta \alpha_{m+2}$ , folglich ist wegen (2a)  $\Delta \alpha_1 = \Delta \alpha_2 = \dots = \Delta \alpha_{m+2}$ :

insbesondere ist mit Rücksicht auf (34)  $\Delta a_{m+1} = \Delta a_1 = \theta$  und  $a_{m+1} = a_1 + m\theta$ ; (39) geht also über in

$$S - S_m = e^{2\pi i a_1} \sum_{\nu=m+1}^n a_\nu e^{2(\nu-1)\pi i \theta},$$

mit nach (40)

$$a_{m+1} \geq a_{m+2} \geq \dots \geq a_n > 0;$$

hierin ist wegen (41) und (37)

$$a_\nu > a_{\nu+1} (\nu = m+1, m+2, \dots, n-1)$$

höchstens dann, wenn  $\nu\theta + \frac{1}{2}$  ganz rational ist. Weiter folgt aus (42) und (37), dass  $0 < \theta \leq \frac{1}{4}$  ist, und, dass  $n\theta + \frac{1}{2}$  ganz rational ist.

Mit Rücksicht auf (36) und (37) folgt aus diesen letzten Ergebnissen, dass  $S$  tatsächlich die Form (16) besitzt, womit der Satz bewiesen ist.

**Beweis von Zusatz 3.** Es sei  $a_1$  irgend eine reelle Zahl, während  $a_\nu = a_1 + (\nu-1)\theta$  gesetzt wird; weiter sei  $a_\nu = a_1$  wo  $a_1$  irgend eine positive Zahl ist ( $\nu = 1, 2, \dots$ ). Bezeichnet  $n$  irgend eine natürliche Zahl, so sind die Bedingungen (2a) und (2a) offenbar erfüllt. Nach dem ersten Teil von Hilfssatz 2 liegen dann die Punkte

$$S_n = \sum_{\nu=1}^n a_\nu e^{2\pi i a_\nu} \quad (n = 0, 1, \dots)$$

alle auf dem Rand des Kreises  $K_0$ , wobei die Winkel  $S_n M_0 S_{n+1}$  stets gleich  $2\pi\theta$  sind; da  $\theta$  irrational ist, liegen diese Punkte  $S_n$  bekanntlich überall dicht auf der Peripherie von  $K_0$  (sie liegen dort sogar gleichverteilt). Ist also  $P$  der zu dem Ursprung diametralen Punkt des Kreises  $K_0$ , so kann man zu jeder positiven Zahl  $\varepsilon$  einen Punkt  $S_n$  mit  $n > 1$  finden, so dass

$$\overline{S_n P} = |S_n - P| < \varepsilon \quad \dots \quad (43)$$

ist.

Wegen (9) ist aber

$$|P| = 2R_0 = a_1 \cosec(\pi \Delta a_1) = a_1 \cosec(\pi \theta) \quad \dots \quad (44)$$

Aus (43) und (44) folgt jetzt (17), womit Zusatz 3 bewiesen ist.

**Mathematics.** — *Die linearen Komplexe in der nicht-Euklidischen Geometrie.* II. Von O. BOTTEMA. (Communicated by Prof. W. VAN DER WOUDE.)

(Communicated at the meeting of May 28, 1932.)

#### IV. Ausarbeitung einiger Beispiele.

15. Im vorhergehenden ist die Theorie allgemein gehalten. Wir wollen in diesem Abschnitt einige Beispiele etwas eingehender betrachten.

Wir wenden uns zuerst dem *allgemeinen Typus in  $R_{2n-1}$*  zu.

Die Wurzeln der charakteristischen Gleichung der Produktkollineation  $C$  sind sämtlich einfach; wenn wir sie mit  $a_1, a_2, \dots, a_n, -a_1, \dots, -a_n$  ( $a_i \neq \pm a_j$ ) bezeichnen, so können wir das Koordinatensystem so wählen, dass die  $x$  und die  $y$ -Kollineationen  $C_1$  und  $C_2$  bzw. die Gestalt erhalten:

$$C_1 : \left\| \begin{array}{cccccc} a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{array} \right\|, C_2 : \left\| \begin{array}{cccccc} -a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -a_2 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -a_n \end{array} \right\| \quad (15.1)$$

Offenbar könnte man mit gleichem Rechte die kanonische Darstellung wählen, wobei statt  $a_i$  geschrieben wird  $-a$ .

Die Varietäten  $W_1$  und  $W_2$  mit den Gleichungen  $y_i = o$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ),  $x_i = o$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) sind eine Wahl aus  $2^{n-1}$  völlig gleichberechtigten Paaren.

Metrische Invarianten des Komplexes sind die Verhältnisse der  $n$  Zahlen  $a_i^2$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ).

Die Nullkorrelation des Komplexes erhält wegen (4, 3), (4, 4), (4, 5) die Form

$$\left. \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & \dots & x_n & y_n & \dots & y_2 & y_1 \\ U_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ U_2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & -a_2 & 0 \\ \cdot & \cdot \\ U_n & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_n & \dots & 0 & 0 \\ V_n & 0 & 0 & \dots & a_n & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot \\ V_1 & a_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array} \right\} \quad \dots \quad (15.2)$$

Man hat

$$\left. \begin{array}{l} p_{ij} = 0 \quad , \quad i+j \neq 2n+1 \\ p_{2n+1-i,i} = -p_{i,2n+1-i} = a_i \quad , \quad i=1,2,\dots,n. \end{array} \right\} \dots \quad (15,3)$$

Die Kollineationen  $C_1$  und  $C_2$  gehören dem allgemeinen Typus an; jede mit  $n$  Deckpunkten. Es sind augenscheinlich die Eckpunkte des Koordinatensimplexes. Mit dem in  $W_1$  gelegenen Deckpunkt

$$x_k = 1 \quad , \quad x_l = 0 \quad (l \neq k) \quad , \quad y_i = 0 \quad (i=1,2,\dots,n). \quad \dots \quad (15,4)$$

ist korollar verbunden der in  $W_2$  gelegene  $(n-2)$ -dimensionale Raum mit den Gleichungen

$$x_i = 0 \quad (i=1,2,\dots,n) \quad , \quad y_k = 0. \quad \dots \quad (15,5)$$

Sie bestimmen einen  $R_{n-1}$ , welcher ganz auf  $Q$  liegt und die Gleichungen hat:

$$\left. \begin{array}{l} x_i = 0 \quad (i=1,2,\dots,k-1,k+1,\dots,n) \\ y_k = 0 \end{array} \right\} \dots \quad (15,6)$$

Die Kollineation  $C$  hat in allem  $n$   $(2n-1)$  Deckgerade; es liegen davon  $(2n^2-2n)$  auf  $Q$ .

*Der Komplex hat  $n$  eigentliche Achsen.*

Eine Achse hat die Gleichungen

$$x_i = y_i = 0 \quad (i=1,2,\dots,k-1,k+1,\dots,n) \quad \dots \quad (15,7)$$

Je zwei Achsen sind konjugiert zu  $Q$ .

Die Anzahl der Deck- $R_{n-1}$  von  $C$  beträgt  $\binom{2n}{n}$ . Ein solcher hat die Gleichungen

$$x_{k_1} = x_{k_2} = \dots x_{k_p} = y_{l_1} = y_{l_2} = \dots y_{l_q} = 0 \quad \dots \quad (15,8)$$

wo  $p+q=n$ .

Der Deckraum liegt auf  $Q$ , wenn jede Zahl  $k_i$  ungleich ist jeder Zahl  $l_j$ . Die Anzahl der auf  $Q$  gelegenen Leiträume  $R_{n-1}$  beträgt also  $1 + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots = 2^n$ . Sie zerfallen in  $2^{n-1}$  windschiefe Paare.

Die Bewegungen, welche den Komplex invariant lassen, sind an erster Stelle diejenigen, welche aus den mit  $C_1$  vertauschbaren Matrizes gebildet werden können. Sie bilden eine  $n$ -gliedrige Gruppe. Ihre Gleichungen sind

$$x'_i = b_i x_i \quad , \quad y'_i = \varrho b_i^{-1} y_i \quad (i=1,\dots,n). \quad \dots \quad (15,9)$$

wo  $\varrho$  und  $b_1, b_2, \dots, b_n$  willkürliche Zahlen  $\neq 0$  sind. Die Achsen des Komplexes bleiben bei diesen Bewegungen jede für sich invariant.

Neben dieser Gruppe gibt es noch die Transformation  $T$

$$x'_i = y_i \quad , \quad y'_i = x_i \quad . \quad (15,10)$$

und die Produkte von  $T$  mit den Elementen der Gruppe (15.9); die Transformationen dieses adjungierten Systems vertauschen die Exemplare jedes Paars windschiefer auf  $Q$  gelegenen Leit- $R_{n-1}$ ; auch diesen Bewegungen gegenüber ist jede Achse für sich invariant.

Wie wir schon in (9) bemerkt haben, gibt es numerisch spezialisierte Fälle, wo der Komplex noch weitere automorphe Kollineationen zulässt.

Ist  $n = kp$ ,  $\sigma^p = 1$  ( $\sigma^2 \neq 1$ ), und gilt für die Koeffizienten:

$$a_1 = m_1, \quad a_2 = \sigma m_1, \quad a_3 = \sigma^2 m_1, \quad \dots \quad a_p = \sigma^{p-1} m_1$$

$$a_{p+1} = m_2, \quad a_{p+2} = \sigma m_2, \quad \dots \quad \dots \quad a_{2p} = \sigma^{p-1} m_2$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$

$$a_{(k-1)p+1} = m_k, \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad a_{kp} = \sigma^{p-1} m_k$$

wo  $m_1, m_2 \dots m_k$  willkürliche Zahlen sind, so ist der Komplex noch invariant gegenüber der Bewegung:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 x'_1 & = & x_2, & x'_2 & = & x_3, & \dots & \dots & \dots & x'_p & = & x_1, \\
 x'_{p+1} & = & x_{p+2}, & x'_{p+2} & = & x_{p+3}, & \dots & \dots & \dots & x'_{2p} & = & x_{p+1}, \\
 \dots & \dots \\
 x'_{(k-1)p+1} & = & x_{(k-1)p+2}, & x'_{(k-1)p+2} & = & x_{(k-1)p+3}, & \dots & \dots & \dots & x'_{kp} & = & x_{(k-1)p+1} \\
 y'_1 & = & y_2, & y'_2 & = & y_3, & \dots & \dots & \dots & y'_p & = & y_1 \\
 \dots & \dots \\
 y'_{(k-1)p+1} & = & y'_{(k-1)p+2}, & y'_{(k-1)p+2} & = & y'_{(k-1)p+3}, & \dots & \dots & \dots & y'_{kp} & = & y_{(k-1)p+1}
 \end{array}$$

und deren Potenzen, welche eine zyklische Gruppe bilden. Die Achsen des Komplexes werden durch diese Bewegungen in einer bestimmten Weise permutiert.

Die infinitesimale Transformation von  $C$  hat die Form

$$\frac{dx_i}{dt} = a_i x_i, \quad \frac{dy_i}{dt} = -a_i y_i, \quad \dots \quad (15.11)$$

welche in der Tat eine infinitesimale Bewegung darstellt. Integration gibt die eingliedrige Bewegungsgruppe

$$x'_i = e^{a_i t} \quad , \quad y'_i = e^{-a_i t} y_i \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15.12)$$

wo  $t$  die Variablen bezeichnet. Durch jeden Punkt geht eine Bahnkurve. Der  $R_{2n-2}$  senkrecht zu dem Tangenten ist der Nullraum.

16. Der soeben betrachtete Komplex ist der erste einer Reihe von Typen. Am Ende dieser Reihe steht der am meisten spezialisierte Typus, wo die Produktkollineation  $C$  die Segre-Notation  $[(111 \dots) (111 \dots)]$  hat.

$C_1$  und  $C_2$  stellen *identische Kollineationen* dar. Jeder Punkt von  $W_1$  und  $W_2$  ist ein Deckpunkt von  $C$ .  $W_1$  und  $W_2$  sind jetzt eindeutig bestimmt. (Dies ist immer der Fall, wenn die charakteristischen Wurzeln von  $C$  sämtlich einander gleich sind, auch bei andern Teilbarkeitseigenschaften der Minoren).

Für  $C_1$  und  $C_2$  erhalten wir jetzt

$$C_1 : \left\| \begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array} \right\|, \quad C_2 : \left\| \begin{array}{cccccc} -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \end{array} \right\|. \quad (16.1)$$

Die Nullkorrelation des Komplexes ist dann

$$\left. \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & \dots & x_n & y_n & \dots & y_2 & y_1 \\ U_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ U_2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \\ \dots & \dots \\ U_n & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ V_n & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots \\ V_1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array} \right\} \quad (16.2)$$

Der Komplex enthält keine willkürlichen Parameter; alle Komplexe dieses Typus sind kongruent.

Jede Gerade, welche  $W_1$  und  $W_2$  schneidet, ist jetzt eine Achse. Der Komplex hat  $\infty^{2n-2}$  Achsen.

Die Gleichungen einer Achse sind

$$x_i = m_i, \quad y_i = \lambda n_i, \quad \dots, \quad (16.3)$$

wo  $\lambda$  ein Parameter,  $m_i$  und  $n_i$  willkürliche Zahlen sind. Die Achse ist uneigentlich, wenn  $\sum_i m_i n_i = 0$  ist. Es gibt also  $\infty^{2n-3}$  uneigentliche Achsen.

Was die Deck- $R_{n-1}$  betrifft, diese müssen  $W_1$  und  $W_2$  bezw. in einem  $R_p$  und einem  $R_q$  schneiden, sodass  $p + q = n - 2$ . Jeder  $R_p$  in  $W_1$  und ein  $R_{n-p-2}$  in  $W_2$  bestimmen einen Deck- $R_{n-2}$ . Es gibt also eine Mannigfaltigkeit solcher Gebilde, welche die Dimension hat:

$$\sum_{p=0}^{n-2} 2(p+1)(n-p-1) = 2n \sum (p+1) - 2 \sum (p+1)^2 = \frac{1}{3}(n-1)n(n+1) \quad (16.4)$$

Jeder auf  $Q$  gelegene  $R_{n-1}$ , welcher  $W_1$  und  $W_2$  schneidet in einem  $R_p$  bezw. einem  $R_q$ , so dass  $p + q = n - 2$ , ist ein Leit- $R_{n-1}$  des Komplexes.

Zu jedem  $R_p$  in  $W_1$  gehört ein  $R_{n-p-2}$  in  $W_2$  mit denselben dualen Koordinaten, welche zusammen einen auf  $Q$  gelegenen Deck- $R_{n-1}$  be-

stimmen. Es gibt deren also eine Mannigfaltigkeit mit der Dimension  $\frac{1}{6}(n-1)n(n+1)$ .

Die Bewegungsgruppe welche den Komplex invariant lässt, bestimmen wir wieder durch die Betrachtung der mit  $C_1$  vertauschbaren Matrizes.  $C_1$  ist aber mit jeder Matrix vertauschbar. Wir erhalten also die Gruppe:

$$(x') = B_1 \cdot \{x\} , \quad y' = \varrho \cdot (B'_1)^{-1} \{y\} \dots \dots \quad (16.5)$$

wo  $B_1$  eine willkürliche (nicht singuläre) Matrix ist.

Der Komplex lässt also eine  $n^2$ -gliedrige Bewegungsgruppe zu.

Es ist diese auch gerade die Gruppe, welche  $W_1$  und  $W_2$  invariant lässt.

Weiter ist der Komplex noch invariant für die Transformation

$$x'_i = y_i , \quad y'_i = x_i \dots \dots \dots \quad (16.6)$$

und für das aus dieser Transformation und der Gruppe zu bildende System.  $W_1$  und  $W_2$  werden durch diese Transformationen vertauscht.

Die zum Komplex gehörige infinitesimale Bewegung ist

$$\frac{dx_i}{dt} = x_i , \quad \frac{dy_i}{dt} = y_i ; \dots \dots \dots \quad (16.7)$$

die eingliedrige Gruppe

$$x'_i = e^t x_i , \quad y'_i = e^{-t} y_i$$

Die Bahnkurven sind also Geraden; und zwar die Transversalen über  $W_1$  und  $W_2$ .

17. Zuletzt geben wir noch ein Beispiel in  $R_{11}$ ; wir setzen voraus, dass der Typus durch die Segre-Notation  $[(21)(11)1]$  angedeutet wird. Für  $C_1$  und  $C_2$  erhalten wir dann:

$$C_1 : \left| \begin{array}{cccccc} a_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_3 \end{array} \right| , \quad C_2 : \left| \begin{array}{cccccc} -a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 -a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 -a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 -a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 -a_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 -a_3 \end{array} \right| \quad (17.1)$$

wo  $a_1^2$ ,  $a_2^2$  und  $a_3^2$  verschieden sind. Für die Koeffizienten der Nullkorrelation (1,1) haben wir dann, so weit sie nicht verschwinden:

$$\left. \begin{array}{l} p_{12,1} = p_{11,2} = p_{10,3} = a_1 , \quad p_{9,4} = p_{8,5} = a_2 \\ p_{12,2} = 1 \quad , \quad p_{7,6} = a_3 \end{array} \right\} \dots \quad (17.2)$$

Der Komplex enthält zwei absolute metrische Invarianten, nämlich die Verhältnisse der Zahlen  $a_1^2$ ,  $a_2^2$ ,  $a_3^2$ .

Die Deckpunkte in  $W_1$  sind:

$$\begin{array}{l} \text{die Punkte der Geraden } l_1: \quad \lambda_1 \ 0 \ \lambda_3 \ 0 \ 0 \ 0 \\ \text{die Punkte der Geraden } m_1: \quad 0 \ 0 \ 0 \ \lambda_4 \ \lambda_5 \ 0 \\ \text{der Punkt } A_1: \quad 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \end{array} \quad \left. \right\} \quad \dots \quad (17,3)$$

Diejenigen in  $W_2$  sind:

$$\begin{array}{l} \text{die Punkte der Geraden } l_2: \quad 0 \ \mu_2 \ \mu_3 \ 0 \ 0 \ 0 \\ \text{die Punkte der Geraden } m_2: \quad 0 \ 0 \ 0 \ \mu_4 \ \mu_5 \ 0 \\ \text{der Punkt } A_2: \quad 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \end{array} \quad \left. \right\} \quad \dots \quad (17,4)$$

Die Deck- $R_4$  in  $W_1$  sind:

$$\begin{array}{l} \text{die } R_4 \text{ des Büschels } b_1: \quad \mu_2 x_2 + \mu_3 x_3 = 0 \\ \text{die } R_4 \text{ des Büschels } C_1: \quad \mu_4 x_4 + \mu_5 x_5 = 0 \\ \text{der } R_4: \quad x_6 = 0 \end{array} \quad \left. \right\} \quad \dots \quad (17,5)$$

Diejenigen in  $W_2$  sind:

$$\begin{array}{l} \text{die } R_4 \text{ des Büschels } b_2: \quad \lambda_1 y_1 + \lambda_3 y_3 = 0 \\ \text{die } R_4 \text{ des Büschels } c_2: \quad \lambda_4 y_4 + \lambda_5 y_5 = 0 \\ \text{der } R_4: \quad y_6 = 0 \end{array} \quad \left. \right\} \quad \dots \quad (17,6)$$

Eine Achse des Komplexes erhält man, indem man einen Deckpunkt in  $W_1$  mit einem in  $W_2$  verbindet. In mehreren Fällen sind sie aber, wie wir aus (7) wissen, uneigentlich. Hier ist das der Fall bei den Kombinationen

$$(l_1, m_2), \quad (l_1, A_2), \quad (m_1, l_2), \quad (m_1, A_2), \quad (A_1, l_2), \quad (A_1, m_2)$$

Die eigentliche Achsenfigur des Komplexes enthält die Kongruenz  $(l_1, l_2)$  (mit Ausnahme der durch  $\lambda_3 \mu_3 = 0$  dargestellten Strahlenbüschel), die Kongruenz  $(m_1 m_2)$  (wenigstens soweit  $\lambda_4 \mu_4 + \lambda_5 \mu_5 \neq 0$ ), und die isolierte Achse  $A_1 A_2$ . Die Gebilde  $W_1$  und  $W_2$  sind für den Komplex nicht von absoluter Bedeutung. Man kann, von einer Vertauschung von  $W_1$  und  $W_2$  abgesehen,  $W_1$  ersetzen durch bwz. die  $R_{n-1}$  mit den Gleichungen

$$\begin{aligned} x_1 &= x_2 = x_3 = y_4 = y_5 = y_6 = 0 \\ x_1 &= x_2 = x_3 = y_4 = y_5 = x_6 = 0 \\ x_1 &= x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = y_6 = 0 \end{aligned}$$

Um die Bewegungsgruppe zu finden, welche den Komplex invariant lässt, müssen wir auf (10) zurückgreifen. Für die dort definierten Zahlen  $n_k$  finden wir hier

$$n_1 = 2, \quad n_k = 0 \quad (k > 1)$$

Also

$$N = 6 + 2 \cdot 2 = 10 \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (17,7)$$

Der Komplex lässt also eine zehngliedrige Bewegungsgruppe zu.

Wenn man die Matrizes hinschreibt, welche mit  $C_1$  vertauschbar sind, findet man für die Bewegungsgruppe folgende Form:

$$\left. \begin{array}{l} x'_1 = h_1 x_1 + h_2 x_2 + h_3 x_3 \\ x'_2 = h_1 x_2 \\ x'_3 = h_4 x_2 + h_5 x_3 \\ x'_4 = h_6 x_4 + h_7 x_5 \\ x'_5 = h_8 x_4 + h_9 x_5 \\ x'_6 = h_{10} x_6 \end{array} \right\} \quad (17,8)$$

Wird diese  $x$ -Transformation mit  $\{x'\} = B_1 \cdot \{x\}$  bezeichnet, dann muss man weiter

$$\{y'\} = \varrho \cdot (B_1)^{-1} \{y\} \quad (17,9)$$

nehmen. Die Gleichungen (17,8) und (17,9) enthalten in der Tat zehn wesentliche Parameter.

Eine weitere automorphe Bewegung des Komplexes wird dargestellt durch

$$\left. \begin{array}{l} x'_1 = y_2 \quad , \quad y'_1 = x_2 \\ x'_2 = y_1 \quad , \quad y'_2 = x_1 \\ x'_3 = y_3 \quad , \quad y'_3 = x_3 \\ x'_4 = y_4 \quad , \quad y'_4 = x_4 \\ x'_5 = y_5 \quad , \quad y'_5 = x_5 \\ x'_6 = y_6 \quad , \quad y'_6 = x_6 \end{array} \right\} \quad (17,10)$$

Daraus geht hervor, dass der Komplex noch ein zu der zehngliedrigen Gruppe adjungiertes System von Bewegungen zulässt.

Die zum Komplex gehörige infinitesimale Bewegung lautet:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= a_1 x_1 + x_2 \quad , \quad \frac{dx_4}{dt} = a_2 x_4 \quad , \quad \frac{dy_1}{dt} = -a_1 y_1 \quad , \quad \frac{dy_4}{dt} = -a_2 y_4 \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_1 x_2 \quad , \quad \frac{dx_5}{dt} = a_2 x_5 \quad , \quad \frac{dy_2}{dt} = -y_1 - a_1 y_2 \quad , \quad \frac{dy_5}{dt} = -a_2 y_5 \\ \frac{dx_3}{dt} &= a_1 x_3 \quad , \quad \frac{dx_6}{dt} = a_3 x_6 \quad , \quad \frac{dy_3}{dt} = -a_1 y_3 \quad , \quad \frac{dy_6}{dt} = -a_3 y_6 \end{aligned}$$

Für die durch Integration hieraus hervorgehende eingliedrige Gruppe hat man dann:

$$\begin{aligned} x'_1 &= e^{a_1 t} x_1 + t e^{a_1 t} x_2 \quad , \quad x'_4 = e^{a_2 t} x_4 \quad , \quad y'_1 = e^{-a_1 t} y_1 \quad , \quad y'_4 = e^{-a_2 t} y_4 \\ x'_2 &= e^{a_1 t} x_2 \quad , \quad x'_5 = e^{a_2 t} x_5 \quad , \quad y'_2 = -t e^{-a_1 t} y_1 + e^{-a_1 t} y_2 \quad , \quad y'_5 = e^{-a_2 t} y_5 \\ x'_3 &= e^{a_1 t} x_3 \quad , \quad x'_6 = e^{a_3 t} x_6 \quad , \quad y'_3 = e^{-a_1 t} y_3 \quad , \quad y'_6 = e^{-a_3 t} y_6 \end{aligned}$$

Diese Gleichungen kann man wieder als diejenigen der zur Gruppe gehörigen Bahnkurven auffassen.

### V. Die Komplexe in $R_3$ .

18. Zum Schluss geben wir noch einen kurzen Überblick über die linearen Komplexe im nicht-Euklidischen dreidimensionalen Raum. Die absolute Figur  $Q$  hat die Gleichung

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 = 0. \quad \dots \quad (18.1)$$

Es gibt offenbar *drei* Typen, welche bzw. die Notation [11], [2], [(11)], haben.

Beim *ersten Typus* haben die Kollineationen  $C_1$  und  $C_2$  die Form

$$C_1: \begin{vmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{vmatrix}, \quad C_2 = \begin{vmatrix} -a_1 & 0 \\ 0 & -a_2 \end{vmatrix}$$

mit  $a_1^2 \neq a_2^2$ . Das Verhältnis der Zahlen  $a_1^2$  und  $a_2^2$  ist die *metrische Invariante des Komplexes*.

Die Nullkorrelation wird dargestellt durch

$$\left. \begin{array}{l} x_1 \quad x_2 \quad y_2 \quad y_1 \\ U_1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -a_1 \\ U_1 \quad 0 \quad 0 \quad -a_2 \quad 0 \\ V_2 \quad 0 \quad a_2 \quad 0 \quad 0 \\ V_1 \quad a_1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \end{array} \right\} \quad \dots \quad (18.2)$$

Sind  $l_{ij}$  die variablen Plückerschen Koordinaten einer Geraden, so lautet die *Gleichung des Komplexes*:

$$a_1 l_{23} + a_2 l_{14} = 0. \quad \dots \quad (18.3)$$

Die in der allgemeinen Theorie genannten Varietäten  $W_1$  und  $W_2$  sind jetzt die Geraden

$$x_1 = x_2 = 0, \quad y_1 = y_2 = 0. \quad \dots \quad (18.4)$$

Sie haben für den Komplex keinen absoluten Sinn, da sie auch ersetzt werden können durch die Geraden

$$x_1 = y_2 = 0, \quad x_2 = y_1 = 0. \quad \dots \quad (18.5)$$

Die vier Geraden (18.4) und (18.5), welche ein windschiefes Vierseit bilden, sind zugleich diejenigen des Komplexes, welche auf der absoluten Figur liegen.

Der Komplex hat *zwei eigentliche Achsen*:

$$x_1 = y_1 = 0, \quad x_2 = y_2 = 0. \quad \dots \quad (18.6)$$

Es sind die Diagonalen des genannten Vierseits; sie sind konjugierte Gerade des Komplexes und zugleich konjugiert bezüglich  $Q$ .

Der Komplex ist invariant gegenüber der Bewegungsgruppe

$$\left. \begin{array}{l} x'_1 = b_1 x_1, \quad y'_1 = \varrho b_1^{-1} y_1 \\ x'_2 = b_2 x_2, \quad y'_2 = \varrho b_2^{-1} y_2 \end{array} \right\} \quad \dots \quad (18,7)$$

Das ist die *zweigliedrige* Gruppe der Schraubenbewegungen um die Achsen (18,6).

Der Komplex lässt daneben noch die Transformation

$$\left. \begin{array}{l} x'_1 = y_1, \quad y'_1 = x_1 \\ x'_2 = y_2, \quad y'_2 = x_2 \end{array} \right\} \quad \dots \quad (18,8)$$

oder

$$l'_{12} = l_{34}, \quad l'_{34} = l_{12}, \quad l'_{13} = l_{42}, \quad l'_{42} = l_{13}, \quad l'_{14} = -l_{14}, \quad l'_{23} = -l_{23}$$

zu. Die Achsen werden durch (18,8) vertauscht.

Die zum Komplex gehörige infinitesimale Bewegung hat die Gleichungen

$$\frac{dx_1}{dt} = a_1 x_1, \quad \frac{dx_2}{dt} = a_2 x_2, \quad \frac{dy_1}{dt} = -a_1 y_1, \quad \frac{dy_2}{dt} = -a_2 y_2. \quad (18,9)$$

Durch Integration geht daraus die eingliedrige Gruppe hervor

$$x'_1 = e^{a_1 t} x_1, \quad x'_2 = e^{a_2 t} x_2, \quad y'_1 = e^{-a_1 t} y_1, \quad y'_2 = e^{-a_2 t} y_2. \quad (18,10)$$

19. Der zweite Typus, welchem die Notation [2] zukommt, hat die zugeordneten Kollineationen

$$C_1 : \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad C_2 = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \quad \dots \quad (19,1)$$

Sämtliche Komplexe dieses Typus sind *kongruent*. Die Nullkorrelation ist jetzt

$$\left. \begin{array}{l} x_1 \quad x_2 \quad y_2 \quad y_1 \\ U_1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -1 \\ U_2 \quad 0 \quad 0 \quad -1 \quad -1 \\ V_2 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \\ V_1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \end{array} \right\} \quad \dots \quad (19,2)$$

Die *Gleichung* des Komplexes ist:

$$l_{23} + l_{14} + l_{31} = 0. \quad \dots \quad (19,3)$$

Die Geraden  $W_1$  und  $W_2$  haben die Gleichungen

$$x_1 = x_2 = 0, \quad y_1 = y_2 = 0. \quad \dots \quad (19,4)$$

Sie können nicht durch andere Geraden ersetzt werden. Die Geraden (18,5) des vorigen Typus sind in die Gerade:

$$x_2 = y_1 = 0 \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (19.5)$$

zusammengefallen. Der Komplex hat mit  $Q$  also nur drei Geraden gemeinsam.

Der Komplex hat *keine eigentliche Achse*. Die zwei Achsen des vorigen Typus sind ebenfalls in die uneigentliche (19.5) gerückt.

Die Bewegungsgruppe des Komplexes ist

$$\left. \begin{array}{l} x'_1 = b_{11} x_1 + b_{12} x_2, \quad y'_1 = \varrho b_{11}^{-1} y_1 \\ x'_2 = \quad b_{11} x_2, \quad y'_2 = -\varrho b_{12} \cdot b_{11}^{-2} y_1 + \varrho b_{11}^{-1} y_2 \end{array} \right\} \quad (19.6)$$

Auch diese Gruppe ist *zweigliedrig*. Sie enthält keine eigentlichen Schraubenbewegungen. Während beim vorigen Typus die durch die eigentlichen Achsen bestimmte lineare Kongruenz invariant war, so ist das jetzt mit der parabolischen Kongruenz der Fall, welche aus den Geraden besteht, die  $Q$  längs (19.5) berühren. Die Gruppe enthält die eingliedrige Untergruppe, wofür  $b_{12} = 0$ .

Der Komplex lässt weiter die Transformationen

$$\left. \begin{array}{l} x'_1 = y_2, \quad y'_1 = x_2 \\ x'_2 = y_1, \quad y'_2 = x_1 \end{array} \right\} \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (19.7)$$

oder

$$l'_{12} = -l_{34}, \quad l'_{34} = -l_{12}, \quad l'_{13} = l_{13}, \quad l'_{42} = l_{42}, \quad l'_{14} = l_{23}, \quad l'_{23} = l_{14},$$

zu.

Die infinitesimale Bewegung ist hier

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_1 + x_2, & \frac{dy_1}{dt} &= -y_1 \\ \frac{dx_2}{dt} &= x_2, & \frac{dy_2}{dt} &= -y_1 - y_2, \end{aligned}$$

und die eingliedrige Gruppe

$$\left. \begin{array}{l} x'_1 = e^t x_1 + t e^t x_2, \quad y'_1 = e^{-t} y_1 \\ x'_2 = e^t x_2, \quad y'_2 = -t e^{-t} y_1 + e^{-t} y_2 \end{array} \right\} \quad \dots \quad \dots \quad (19.8)$$

20. Für den dritten Typus [(11)] haben wir:

$$C_1: \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad C_2 = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}, \quad \dots \quad \dots \quad (20.1)$$

Die Komplexe dieses Typus sind ebenfalls sämtlich *kongruent*. Die Nullkorrelation ist jetzt:

$$\left. \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & y_2 & y_1 \\ U_1 & 0 & 0 & 0 \\ U_2 & 0 & 0 & -1 \\ V_2 & 0 & 1 & 0 \\ V_1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right\} \quad \dots \quad (20,2)$$

Die *Gleichung* des Komplexes ist also

$$l_{23} + l_{14} = 0 \quad \dots \quad (20,3)$$

Die Geraden  $W_1$  und  $W_2$ :

$$x_1 = x_2 = 0, \quad y_1 = y_2 = 0 \quad \dots \quad (20,4)$$

sind die einzigen, welche der Komplex mit dem einen System von Erzeugenden auf  $Q$  gemeinsam hat; der Komplex enthält jedoch jede Erzeugende des anderen Systems. Die Gleichung einer Gerade dieses Systems ist

$$x_1 = ax_2, \quad y_1 = -a^{-1}y_2;$$

die Plückerschen Koordinaten

$$l_{12} : l_{34} : l_{13} : l_{42} : l_{14} : l_{23} = 0 : 0 : a^2 : 1 : -a : a \quad \dots \quad (20,5)$$

Der Komplex hat eine *Achsenkongruenz*; ihre Richtlinien sind  $W_1$  und  $W_2$ . Die Gleichungen einer eigentlichen Achse sind

$$x_1 = ax_2, \quad y_1 = by_2, \quad ab \neq -1,$$

ihre Koordinaten

$$0 : 0 : a : -b : ab : 1 \quad \dots \quad (20,6)$$

$L$  ist invariant für die *viergliedrige* Bewegungsgruppe

$$\left. \begin{array}{l} x'_1 = b_{11}x_1 + b_{12}x_2, \quad y'_1 = \varrho b_{22}y_1 - \varrho b_{21}y_2 \\ x'_2 = b_{21}x_1 + b_{22}x_2, \quad y'_2 = -\varrho b_{12}y_1 + \varrho b_{11}y_2 \end{array} \right\} \quad \dots \quad (20,7)$$

oder

$$l'_{23} = \varrho b_{11}b_{22}l_{23} - \varrho b_{12}^2l_{14} + \varrho b_{11}b_{21}l_{13} - \varrho b_{12}b_{22}l_{24}$$

$$l'_{14} = \varrho b_{11}b_{22}l_{14} - \varrho b_{12}^2l_{23} - \varrho b_{11}b_{21}l_{13} + \varrho b_{12}b_{22}l_{24}, \text{ u.s.w.}$$

Wählt man die Zahlen  $b_{ij}$  so, dass

$$(b_{11} - b_{22}) : b_{12} : b_{21} = (ab - 1) : a : b,$$

so erhält man die Bewegung, wobei die Achse (20,6) und auch die polare Gerade in Ruhe bleiben.

Der Komplex ist, wie der des ersten Typus, auch gegenüber der Transformation

$$\begin{aligned} x'_1 &= y_1 \quad , \quad y'_1 = x_1 \\ x'_2 &= y_2 \quad , \quad y'_2 = x_2 \end{aligned}$$

invariant.

Aus (20,1) geht hervor, dass der Komplex *autopolar* ist.

Seine infinitesimale Bewegung ist

$$\frac{dx_1}{dt} = x_1 \quad , \quad \frac{dx_2}{dt} = x_2 \quad , \quad \frac{dy_1}{dt} = -y_1 \quad , \quad \frac{dy_2}{dt} = -y_2 ,$$

die eingliedrige Gruppe

$$x'_1 = e^t x_1 \quad , \quad x'_2 = e^t x_2 \quad , \quad y'_1 = e^{-t} y_1 \quad , \quad y'_2 = e^{-t} y_2$$

Die Bahnkurven sind Geraden, und zwar die Achsen.

21. Wir fügen noch eine Bemerkung hinzu über die Frage inwieweit die soeben besprochenen Typen in den üblichen nicht-Euklidischen Geometrien *reell* vorkommen können.

In unsrer Ableitung nahmen wir  $Q$  in der Gestalt

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21,1)$$

an. Durch die Transformation

$$x_1 = \xi_1 + i\eta_2 \quad , \quad y_1 = \xi_1 - i\eta_1 \quad , \quad x_2 = \xi_2 + k\eta_2 \quad , \quad y_2 = \xi_2 - k\eta_1 \quad (21,2)$$

erhält sie die Gleichung

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 + \eta_1^2 - k^2 \eta_2^2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21,3)$$

Für  $k^2 > 0$  bzw.  $k^2 < 0$  kann man auf (21,3) eine hyperbolische, bzw. elliptische Geometrie gründen. Aus (21,2) geht für die Linien Koordinaten, welche wir im  $(\xi, \eta)$ -System mit  $\lambda_{ij}$  bezeichnen wollen, folgende Transformation hervor

$$\begin{aligned} l_{23} &= 2ik\lambda_{24} \\ l_{14} &= 2i\lambda_{13} \\ l_{13} &= -\lambda_{12} - k\lambda_{34} + ik\lambda_{14} + i\lambda_{23} \end{aligned} \quad \left. \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21,4)$$

u.s.w.; die übrigen Koordinaten sind für uns ohne Bedeutung.

Aus (18,3) ersehen wir, dass *der erste Typus* sowohl in der hyperbolischen, wie auch in der elliptischen Geometrie *reell* möglich ist.

Der *zweite Typus*, (19,3) ist in keiner dieser Geometrien *reell* möglich; was übrigens auch aus dem Vorkommen der einzigen Achse (19,5) unmittelbar hervorgeht.

Aus (20,3) endlich folgern wir, dass *der dritte Typus* nur in der elliptischen Geometrie *reell* möglich ist. Aus den Eigenschaften dieses Kom-

plexes lässt sich leicht eine Konstruktion herleiten. Man nimmt auf  $Q$  zwei konjugiert imaginäre windschiefe Erzeugenden  $W_1$  und  $W_2$ , und ordnet jedem Punkte  $P$  die Ebene zu durch die Polgerade der Transversale über  $W_1$  und  $W_2$ .

Wir bemerken übrigens, dass man diese Konstruktion als eine einfache projektive Erzeugungsweise des allgemeinen linearen Komplexes auffassen kann.

---

**Chemistry.** — *On the magnetic properties of some compounds of Molybdenum, Tungsten and Chromium, in various states of valency of these elements.* By B. TH. TJABBES. (Communicated by Prof. F. M. JAEGER.)

(Communicated at the meeting of April 30, 1932.)

§ 1. This paper must be considered as a preliminary<sup>1)</sup> communication of the results obtained in the study of the magnetic properties of a number of compounds of the so-called "transition-elements", No's 21-28, 39-46, 57-78 and 89-92 of the periodical system. Of these elements, which, — as well in the form of atoms as in that of ions, — all possess electronic levels with an incomplete number of electrons, those of the *iron*-group, as well as those of the *rare earth*-metals, have been studied in sufficient details. Moreover, some exact work has been done with respect to the *platinum*-metals and some of their compounds, but in some cases the agreement between the results obtained by the different observers is rather unsatisfactory. As far as their magnetic properties are concerned, our knowledge about the compounds of the other transition-elements, however, is still a very rudimentary one. Of these latter elements more in particular a series of derivatives of *molybdenum* in its various states of valency and of pentavalent *tungsten* and *chromium* will be considered here with respect to their magnetic behaviour.

As an illustration of the fact of the incompleteness of the electronic *d*-levels, — respectively of the *4f*-level in the case of the rare earth-metals —, a survey of the number and distribution of the electrons in the ions of some of these elements is given in the following Table I; the number of electrons present in the incomplete level is indicated in heavy print.

A *d*-level is complete when it contains 10, the *f*-level, when it contains 14 electrons.

§ 2. The manifestation of a relatively strong paramagnetism in chemical compounds proves to be dependent upon the presence in them of such elements with incomplete electronic levels. In the following, the specific magnetic susceptibility of the element or the compound investigated will

---

<sup>1)</sup> *Conf. Thesis*, Groningen, to be published on 6<sup>th</sup> of July.

TABLE I.

Level:	{	K		L		M			N				O			P			
		1s	2s	2p	3s	3p	3d	4s	4p	4d	4f	5s	5p	5d	...	6s	6p	6d	...
Maximum Number of Electrons:		2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10		2	6	10	
Ion	Number of Electrons																		
Cr <sup>6+</sup>	18	2	2	6	2	6													
Cr <sup>5+</sup>	19	2	2	6	2	6	1												
Cr <sup>3+</sup>	21	2	2	6	2	6	3												
Fe <sup>3+</sup>	23	2	2	6	2	6	5												
Cu <sup>+</sup>	28	2	2	6	2	6	10												
Mo <sup>6+</sup>	36	2	2	6	2	6	10	2	6										
Mo <sup>5+</sup>	37	2	2	6	2	6	10	2	6	1									
Mo <sup>3+</sup>	39	2	2	6	2	6	10	2	6	3									
Ru <sup>3+</sup>	41	2	2	6	2	6	10	2	6	5									
La <sup>3+</sup>	54	2	2	6	2	6	10	2	6	10	2	6							
Ce <sup>3+</sup>	55	2	2	6	2	6	10	2	6	10	1	2	6						
Er <sup>3+</sup>	65	2	2	6	2	6	10	2	6	10	11	2	6						
W <sup>6+</sup>	68	2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6						
W <sup>5+</sup>	69	2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	1					
Ir <sup>4+</sup>	73	2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	5					
U <sup>4+</sup>	88	2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10		2	6	2	

be denoted by  $\chi$ ; it is negative in the case of diamagnetism, positive in that of paramagnetic (and ferromagnetic) substances. In the case of *normal* paramagnetism  $\chi$  approximately follows the CURIE- or the CURIE-WEISS-law. In the case of *anomalous* paramagnetism  $\chi$ , as a rule, has small positive values, which, moreover, are independent of the temperature, — as also occurs with diamagnetic substances. With respect to problems on atomic structure, this typical form of anomalous paramagnetism can practically be treated as a special case of diamagnetism.

From the measurements of  $\chi$  the "molecular" susceptibility  $\chi_M$  of the compound is calculated by multiplication by the molecular weight  $M$ ; from this value  $\chi_M$ , the "atomic" susceptibility  $\chi_A$  of the element considered is calculated by the application of a number of corrections concerning the

atomic susceptibilities of the diamagnetic atoms or ions combined with that element. If the atomic CURIE-constant  $C_A (= \chi_A \cdot T \text{ or } = \chi_A \cdot (T - \vartheta))$  is known, the number  $P_w$  of WEISS-magnetons associated with the element, can be calculated from :

$$P_w = \frac{1}{1123.5} \sqrt{3R \cdot C_A} = 14.06 \cdot \sqrt{C_A}.$$

As  $P_w$  is dependent on the specific nature of the element, on its valency and on the special way in which it is linked in the compound, the determination of  $P_w$  may give us evidence as well about the valency of the element, as about its chemical linkage in the compound. In this respect, the free ions of the elements, as they occur in solutions, show the least complicated relations:  $P_w$  proves to be dependent on the number of electrons present in the incomplete electronic level of the element, so that ions of different elements possessing the same number of electrons and, therefore, the same number  $N$  of electrons within their incomplete level, also prove to yield almost identical values of  $P_w$ . The dependence of  $P_w$  on  $N$  is different in the case of the elements of the first transition-series on the one hand and in that of the rare earth-metals on the other. It can be established by HUND's theoretical views<sup>1)</sup>; but for the elements of the iron-group a better agreement between the calculated and the observed numbers of magnetons can be obtained by the theoretical considerations of BOSE<sup>2)</sup> and STONER<sup>3)</sup>, who ascribe the paramagnetic effect solely to the spin of the electrons, not to their orbital motions. The degree of concordance between the observed and calculated numbers of magnetons may best be seen from the following Table<sup>4)</sup> II :

TABLE II.

Number of Electrons of the Ion:	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
Number of 3d-Electrons:	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Fundamental State (HUND):	$^1S_0$	$^2D_{3/2}$	$^3F_2$	$^4F_{3/2}$	$^5D_0$	$^6S_{5/2}$	$^5D_4$	$^4F_{9/2}$	$^3F_4$	$^2D_{5/2}$	$^1S_0$
$P_H$ (acc. to HUND):	0	7.67	8.09	3.48	0.00	29.30	33.22	32.85	27.68	17.58	0
$P_{B-S}$ (acc. to BOSE-STONER):	0	8.58	14.01	19.18	24.26	29.30	24.26	19.18	14.01	8.58	0
$P_w$ (observed):	0	8.6	14	19.1	23.9	29.1	25.5 to 27.5	22 to 26.5	16 to 17	9 to 10	0

1) F. HUND, Zeits. für Phys., 33, (1925), 855.

2) D. M. BOSE, ibid., 43, (1927), 864.

3) E. C. STONER, Phil. Mag., (7), 8, (1929), 250.

4) Conf.: C. J. GORTER, Thesis, Leyden, (1932), 52; E. C. STONER, Magnetism, (1930), 49.

In all cases, however, complications may arise, if the compounds are studied in the crystalline state instead of in solutions; or if they are "complex" compounds, possessing co-ordinative (homoeopolar) bonds instead of, or besides, ionogenic linkages, — because such co-ordinative linkages may have an influence which is comparable with an increase of the number of electrons in the incomplete level of the co-ordinatively bound element with 2 electrons for each co-ordinative bond. But the number of magnetons never increases by this addition of pairs of electrons, since the latter have oppositely directed spins. It is conceivable, that up till now most of the magnetic properties of the compounds here considered, have been studied in the crystalline state, because of the fact that many of these transition-elements do not exist in solutions as free ions, but only either in the form of complex ions, or as ionized, oxygen-containing radicles. Many of these compounds are in aqueous or weakly acid solutions, moreover, strongly hydrolysed.

§ 3. The particular choice of a number of compounds of *molybdenum* for the purpose is justified by the fact, that the valency of this element in its derivatives may vary between 2 and 6, yielding ions with 36 to 40 electrons. Moreover, hitherto only a small number of *molybdenum*-compounds have been studied in this way. The investigation of some derivatives of pentavalent *chromium* and *tungsten* is immediately connected with those of pentavalent *molybdenum*; they, therefore, offer a desirable completion of the data obtained with the latter element.

The greatest difficulty to overcome in the preparation of these compounds, is to obtain them in a perfectly pure, homogeneous state, and, more especially, to get them free from even minute traces of *iron*, — be it in its ferromagnetic or, to a lesser degree, in its paramagnetic form<sup>1)</sup>. Of course, all preparations were carefully analyzed. In the *molybdenum*- and *tungsten*-compounds the amount of iron was estimated, — after preliminary reduction with *hydrazine-sulphate* in *ammoniacal* solution —, by means of the *dimethyl-glyoxime*-reaction of TSCHUGAEFF and ORELKIN<sup>2)</sup>; in the case of the *chromium*-compounds the iron was estimated by means of *potassium-thodanide* and *ether*.

In some cases the influence of intentionally added, measured quantities of iron on the magnetic effect was systematically studied; as the upper allowable limit of the iron-content, 0.004 % was adopted; only in two cases the iron-content proved to be a little higher than this.

The results of the magnetic measurements are collected in the following Table III.

In this table  $\chi_M$  has always been calculated for such a quantity of the

<sup>1)</sup> In the latter case, a content of 0.003—0.004 % Fe causes errors of  $\chi$  of about  $0.01 \cdot 10^{-6}$ .

<sup>2)</sup> L. TSCHUGAEFF and B. ORELKIN. Zeits. f. anorg. Chem., 89, (1914). 401.

TABLE III. REVIEW OF THE RESULTS OBTAINED

Number:	Element:	Valency:	Compound:	Specific Gravity:	0/0 Fe:	Analysis:		Magnetic Measurements					Remarks	Number	
						0/0 (calc.)	0/0 (obs.)	t (°C):	χ · 10 <sup>6</sup> :	χ <sub>M</sub> · 10 <sup>6</sup> :	χ <sub>A</sub> · 10 <sup>6</sup> :	P <sub>W</sub>			
1	Mo	Mo	Mo	(10.2)	0.004	Mo	100.0	99.9	17°	+ 0.89		+ 85	(Z = + 0.04 · 10 <sup>-6</sup> ; χ <sub>A</sub> = + 1.04 · 10 <sup>-6</sup> ) (HONDA)		
	..	4	Mo O <sub>2</sub>	(6.44)	< 0.004	Mo	75.0	74.8	16°	+ 0.31	+ 41	+ 50	(Z = + 0.91 · 10 <sup>-6</sup> ) (HONDA and SCHIMIZU)		
3	..	6	Mo O <sub>3</sub>	(4.50)	< 0.003				19.5°	+ 0.02	+ 3	+ 17	(Z = + 0.33 · 10 <sup>-6</sup> ) (WEDEKIND and HORST)	2	
4	..	4	Mo S <sub>2</sub>	(5.06)	< 0.003	Mo	60.0	59.5	16°	- 0.48	- 77	- 47	(Z = + 0.09 · 10 <sup>-6</sup> ) (BERKMAN and ZOCHER)		
5	..	2, complex	Mo <sub>3</sub> Br <sub>6</sub>	4.88	< 0.004	Mo	37.5	37.5	17.5°	- 0.18	- 46	+ 24	(Z = + 0.12 · 10 <sup>-6</sup> ) (BERKMAN and ZOCHER)	3	
6	..	3	Mo Cl <sub>3</sub>	(3.578)	0.004	Mo	47.5	47.1	17°	+ 0.21	+ 43	+ 104	Probably Z is still somewhat smaller than + 0.21 · 10 <sup>-6</sup> .	4	
7	..	4	Mo Cl <sub>4</sub>		< 0.007	Cl	59.6	58.8	18°	+ 7.35	+ 1750	+ 1830	10.26	The true value of Z certainly is somewhat greater than: + 7.35 · 10 <sup>-6</sup>	5
8	..	5	Mo Cl <sub>5</sub>	(2.927)	< 0.002	Mo	35.1	35.1	16°	+ 3.62	+ 990	+ 1090	7.80		
9	..	6	Mo O <sub>2</sub> Cl <sub>2</sub>	3.31	< 0.002	Mo	48.3	48.1	17°	- 0.14	- 28	+ 22			
10	..	5, complex	(C <sub>5</sub> H <sub>6</sub> N) <sub>2</sub> Mo OCl <sub>5</sub>	1.89	< 0.003	Cl	39.5	39.4	13.5°	+ 2.46	+ 1105	+ 1324	8.67	χ = + 2.435 · 10 <sup>-6</sup> at 29°C	
11	..	5, ..	Rb <sub>2</sub> Mo OCl <sub>5</sub>	3.08	< 0.003	Mo	20.9	21.3	13.5°	+ 2.31	+ 1063	+ 1232	8.35	(The Rb Cl. used contained KCl, the proportion Mo : Cl = 1.000 : 4.995 is exact)	11
12	..	5, ..	(C <sub>5</sub> H <sub>6</sub> N) Mo O <sub>2</sub> Cl <sub>2</sub>	2.34	< 0.003	Mo	34.4	34.1	13.5°	- 0.32	- 90	+ 16	(Mo : Cl = 1.00 : 2.04. Another preparation yielded: χ = - 0.31 · 10 <sup>-6</sup> ; Mo : Cl = 1.00 : 1.96)	12	
13	..	5, ..	(C <sub>5</sub> H <sub>6</sub> N) <sub>2</sub> Mo O (SCN) <sub>5</sub>	1.595	< 0.001	Mo	17.1	17.0	18°	+ 1.62	+ 910	+ 1160	8.17		
14	..	5, ..	(C <sub>5</sub> H <sub>6</sub> N) <sub>2</sub> Mo O <sub>2</sub> (SCN) <sub>3</sub>	1.635	< 0.001	Mo	20.8	20.9	20°	- 0.42	- 194	+ 3			
15	..	5, ..	Ba [Mo O <sub>2</sub> (C <sub>2</sub> O <sub>4</sub> )] <sub>2</sub> · 5 H <sub>2</sub> O	2.838	< 0.002	Mo	29.1	29.1	18°	- 0.23	- 76	+ 17			15
16	..	3, ..	K <sub>3</sub> Mo Cl <sub>6</sub>	2.50	< 0.002	Mo	32.5	32.4	18°	+ 13.23	+ 5635	+ 5810	18.28	K <sub>3</sub> Mo Cl <sub>6</sub> · 2H <sub>2</sub> O: χ = 13.1 · 10 <sup>-6</sup> at 25°C (RAY and BHAR)	16
17	..	6	Zn (NH <sub>3</sub> ) <sub>4</sub> Mo O <sub>8</sub>		< 0.002				15°	- 0.25	- 89	+ 31	Measured very soon after its preparation. After some lapse of time, a decomposition sets in and Z becomes feebly positive. Analysis (after 2 days): 27.4% Mo (calc: 26.9%)	17	
18	W	5, complex	Rb <sub>2</sub> WOCl <sub>5</sub>	3.73	< 0.002	W	33.5	33.8	20°	+ 1.48	+ 806	+ 973	7.51	The RbCl used contained KCl W : Cl = 1.00 : 5.02	18
19	..	5, ..	(C <sub>5</sub> H <sub>6</sub> N) WOCl <sub>4</sub>		< 0.001	W	43.6	44.1	14.5°	+ 1.97	+ 832	+ 974	7.44	Another preparation, which was a little less pure, yielded: χ = + 1.90 · 10 <sup>-6</sup> .	19
20	Cr	5, ..	Rb <sub>2</sub> CrOCl <sub>5</sub>	2.77	< 0.003	Cr	12.5	13.0	17°	+ 2.98	+ 1240	+ 1410	9.00	Valency of Cr: 4.98. The analyzed preparation already a little was decomposed	20
21	..	5, ..	(C <sub>5</sub> H <sub>6</sub> N) CrOCl <sub>4</sub>	(1.790)	< 0.001	Cr	17.9	18.4	16.5°	+ 4.24	+ 1250	+ 1340	8.77	Valency of Cr: 4.98: χ = + 6.18 · 10 <sup>-6</sup> . (WEDEKIND and HORST)	21
22	..	5	K <sub>3</sub> CrO <sub>8</sub>		0.006	Cr	17.5	17.8	17°	+ 3.98	+ 1180	+ 1270	8.53		22

a) Investigation of Mo<sup>5+</sup> in acid solution:1<sup>0</sup>. in dilute hydrochloric acid; red; χ<sub>A</sub> feebly positive, as in the complex salts derived from Mo O<sub>2</sub> X in the crystalline state:2<sup>0</sup>. in a strong hydrochloric solution: green; paramagnetic, with χ<sub>A</sub> of the same order of magnitude as in the solid complex salts, derived from Mo O<sub>2</sub> X.



compound, as contained 1 grammé-atom of *Mo*, *W* or *Cr*. The values of the specific weights between brackets ( ) are taken from the literature; the others were determined in the usual way.

Only the most reliable results are here inserted.

The measurements are all made at room-temperature. The number of magnetons is only calculated in those cases, in which  $\chi_A$  amounts to about  $+1000.10^{-6}$ , or in which it has a still higher value; under the said circumstances CURIE's law is supposed to be valid. This assumption is not always rigorously correct, but, when  $\chi_A$  has a large value, this will, as a rule, not cause serious errors affecting the order of magnitude of  $P_w$ .

The formula used in this case is:  $P_w = 14.06 \cdot \sqrt{\chi_A \cdot T}$ .

§ 4. These results give occasion to the following discussion:

I. *Strongly paramagnetic substances are:*

a. The chlorides  $MoCl_4$  and  $MoCl_5$ ; the complex compounds of *pentavalent molybdenum*,  $Mo^{5+}$ , derived from  $MoOX_3$ ; the complex compounds of *trivalent molybdenum*.

b. The complex compounds of  $W^{5+}$  and  $Cr^{5+}$ , containing the groups  $WOCl_3$  and  $CrOCl_3$  respectively. The *perchromate*  $K_3CrO_8$  also is paramagnetic. All other compounds of *molybdenum* are either *diamagnetic* or *weakly paramagnetic*, but in most cases  $\chi_A$  proves to be *feeble positive*; the element, therefore, seems to show *anomalous paramagnetism* in all these cases. On the other hand, *molybdenum* is completely *diamagnetic* in  $MoS_2$  ( $\chi_A = -47.10^{-6}$ ) and in  $K_4Mo(CN)_8$  ( $\chi_A = -60.10^{-6}$ , according to BILTZ<sup>1)</sup>).  $MoS_2$  evidently is a completely saturated compound.

II. The number of magnetons  $P_w$  of the paramagnetic compounds of  $Mo^{5+}$ ,  $W^{5+}$  and  $Cr^{5+}$ , and that of  $MoCl_5$  prove to be of the same order of magnitude as the value ( $P_w = 8.6$ ) of  $V^{4+}$  in the *iron-group*, which also contains one *d-electron*. The somewhat smaller value of  $P_w$  in the case of  $W^{5+}$  can perhaps be explained by the assumption that in this case  $\vartheta$  in the CURIE-WEISS-formula may not be neglected.

In an analogous way the values of  $P_w$  of  $K_3MoCl_6$  ( $= 18.3$ ) and of  $(NH_4)_3Mo(SCN)_6 \cdot 4H_2O$ , as well as that of  $K_3MoCl_6 \cdot 2H_2O$  ( $= 19.6$ ), also agree in the case of these derivatives<sup>2)</sup> of *trivalent molybdenum* with that of  $Cr^{3+}$  ( $= 19.1$ ). However, the number of magnetons  $P_w$  of  $MoCl_4$  ( $= 10.3$ ) is smaller than that of  $V^{3+}$  ( $= 14.1$ ), which ion also contains two *d-electrons*. As  $MoCl_4$  could not be obtained in a perfectly pure state, the true value of  $P_w$  will probably prove to be somewhat greater, — although the total difference observed cannot yet be explained in this way.

It might also be possible that the fundamental state of the ion  $Mo^{4+}$  is

<sup>1)</sup> W. BILTZ, *Zeits. f. anorg. Chem.*, **170**, (1928), 161.

<sup>2)</sup> P. RAY, *Journ. Indian Chem. Soc.*, **7**, (1930), 741.

P. RAY and H. G. BHAR, *Journ. Indian Chem. Soc.*, **5**, (1928), 497.

not  $^3F_2$ , but for instance:  $^3P_1$  or  $^1D_2$ ; the number of magnetons, calculated according to HUND's conceptions, would then be: 10.5 or 12.1 respectively. The result, obtained by RAY and BHAR in the case of the derivative of  $W^{4+}$ :  $K_2W(OH)Cl_5$  ( $P_w=10.9$ ), would also agree with this assumption.

III. The differences in the magnetic behaviour between the feebly paramagnetic  $MoCl_3$  and the diamagnetic compound  $Mo_3Br_6$  on the one hand, and the strongly paramagnetic ions  $Cr^{3+}$  ( $P_w=19.1$ ) and  $Cr^{2+}$  ( $P_w=23.9$ ) on the other hand, are of much more importance. In the following Table IV the numbers of magnetons and the atomic susceptibilities at  $17^\circ C.$  for the different molybdenum-ions are collected, calculated as well according to HUND's, as to BOSE-STONER's theory; also the observed values are there indicated for the purpose of comparison:

T A B L E IV.					
Ion:	$Mo^{6+}$	$Mo^{5+}$	$Mo^{4+}$	$Mo^{3+}$	$Mo^{2+}$
Number of Electrons:	36	37	38	39	40
Number of 4d-electrons:	0	1	2	3	4
$P_H$ (HUND):	0.00	7.67	8.09	3.48	0.00
$\chi_A \cdot 10^6$ (calc. from $P_H$ ):	0	+ 1025	+ 1140	+ 257	0
$P_{B-St}$ (BOSE-STONER):	0.00	8.58	14.01	19.18	24.26
$\chi_A \cdot 10^6$ (calc. from $P_{B-St}$ ):	0	+ 1285	+ 3420	+ 6410	+ 10260
$P_w$ (observed):		7.80	10.26		
$\chi_A \cdot 10^6$	+ 22	+ 1090	+ 1830	+ 104	+ 24

At first sight, it makes the impression, as if  $\chi_A$ , as deduced from the observations, is in better agreement with the values calculated according to HUND, than with those calculated according to BOSE-STONER. However, there still remains a number of serious discrepancies: thus, for instance,  $\chi_A$  for  $MoCl_4$  is appreciably greater than corresponds to  $P_w=8.09$ , notwithstanding the fact, that  $\chi_A \cdot 10^6 = + 1830$  is certainly still too low; the value of  $\chi_A$  for  $MoCl_3$  is much too low for  $P_w=3.48$ , while the observed value yet seems to be rather too high.

Moreover, the compound  $Mo_3Br_6$ , — a derivative of  $Mo^{2+}$  —, has a trimeric structure ( $[MoBr_2]_3$ ); by this fact alone a diamagnetism or an anomalous paramagnetism can be caused.

The number  $P_w$  found with  $MoCl_5$  can still be considered in agreement

with BOSE-STONER's views; but in the case of  $MoCl_4$  the value observed is in much worse concordance with this theory. Special circumstances may be the origin of the diamagnetism of  $Mo_3Br_6$  and of the weak paramagnetism of  $MoCl_3$ . With respect to the first substance its trimeric structure might cause this effect. In the complex ions,  $Mo^{3+}$  is strongly paramagnetic; the weak paramagnetism of  $Mo^{3+}$  in  $MoCl_3$  can either be caused by the fact that the ion has another fundamental state, in which it does not show normal paramagnetism; or by the formation of strong homoeopolar bonds in the molecule between Mo and chlorine, in connection with the formation of double molecules, which have two *molybdenum*-atoms immediately linked together, each of these atoms having 10 electrons in their 4d-levels. But all this is only hypothetical.

IV. In the case of *pentavalent* molybdenum, a remarkable difference is observed between the derivatives of  $MoOX_3$  and those containing the group  $MoO_2X$ : for the compounds first mentioned  $P_W$  agrees with the expected value for  $Mo^{5+}$  and they are normally paramagnetic; however, the compounds derived from  $MoO_2X$  are diamagnetic,  $\chi_A$  still being in them weakly positive. The same differences are present between the green and the red solutions (see Table III, a.). It may be assumed, that the paramagnetic derivatives of  $MoOX_3$  are *monomolecular*, while those of  $MoO_2X$  are *bimolecular*, both Mo-atoms being immediately linked together by the 4d-electrons, each  $Mo^{5+}$ -ion having only one 4d-electron.

Indeed, from the weakly acid solutions of  $Mo^{5+}$ , occasionally a compound  $Mo_2O_4(OH)Cl$  has been obtained<sup>1)</sup>; this fact makes an explanation as here given, certainly the more probable.

V. Metallic *molybdenum* shows a mediocre and anomalous paramagnetism: the divergences in the values of  $\chi_A$  of this metal in the literature, most probably seem *not* to be caused by a different iron-content<sup>2)</sup>, but rather by a different preliminary treatment of the metal. We found the influence of admixed iron of the order of magnitude, as it is commonly observed in normally paramagnetic substances.

$MoO_3$  is very weakly paramagnetic; but  $MoO_2$  prepared from it, has a susceptibility which is very close to the value determined by WEDEKIND and HORST<sup>3)</sup>. The diamagnetism of  $MoS_2$  has already been dealt with in the above.

VI. The derivatives of  $Cr^{5+}$  and  $W^{5+}$  investigated are all strongly paramagnetic, so that the complex compounds containing  $MoOX_3$ ,  $CrOX_3$  and  $WOX_3$  show a really close resemblance with each other. In the case of the *chromium* compounds, this fact may be considered as a new proof of

<sup>1)</sup> R. G. JAMES and W. WARDLAW, Journ. Chem. Soc. London, (1927), 2145.

<sup>2)</sup> K. HONDA and Y. SHIMIZU, Science Rep. Tôhoku Univ., **20**, (1931), 460.

K. HONDA, Science Rep. Tôhoku Univ., **1**, (1911—1912), 1.

M. OWEN, Ann. der Physik, **4**, 37, (1912), 657.

<sup>3)</sup> E. WEDEKIND and C. HORST, Ber. d. d. chem. Ges., **48**, (1915), 105.

S. BERKMAN and H. ZOCHER, Zeits. f. phys. Chem., **124**, (1926), 318.

the pentavalency of Cr in the complex salts investigated; pentavalent chromium evidently quite belongs in its magnetic behaviour to the ions of the elements of the iron-group. Also the strongly paramagnetic character of  $K_3CrO_8$  makes it certain, that Cr in this compound is pentavalent, — as is corroborated by its isomorphism with the perniobates and pertantalates<sup>1</sup>).

These investigations were performed in the *Laboratory for Inorganic and Physical Chemistry of the University of Groningen* under the supervision of Professor JAEGER, to whom I wish to express my thanks for his suggestions and his interest in this work.

<sup>1</sup>) K. GLEU, *Zeits. f. anorg. Chem.*, **204**, (1932), 67.

G. BOEHM, *Zeits. f. Kryst.*, **63**, (1926), 319.

**Chemistry.** — *Über die Dampfelinie der Dreiphasenstreife für die Koexistenz von den zwei festen Komponenten mit Dampf eines binären Systems.* Von A. SMITS und E. J. HARMSSEN. (Communicated by Prof. J. D. VAN DER WAALS Jr.)

(Communicated at the meeting of April 30, 1932.)

In der Dissertation von Dr. J. P. WUITE<sup>1</sup>) findet man als erste These folgende Behauptung: „Die Zusammensetzung des mit den festen Komponenten eines binären Systems koexistierenden Dampfes verschiebt sich bei Erniedrigung der Temperatur nach der Seite der flüchtigsten Komponente.“ In der  $P, T, X$ -Raumfigur von BAKHUIS ROOZEBOOM ist eine Verschiebung in gerade entgegengesetzter Richtung angenommen, so dass wenn obenstehende Aussage von WUITE richtig ist, diese Raumfigur eine Änderung erfahren muss.

Wie hier unten gezeigt wird, ist die Behauptung von WUITE in der Tat vollkommen richtig und so hat der Erste von uns in seinen Vorlesungen über die Phasenlehre jedes Mal auf diese kleine Unrichtigkeit in der  $P, T, X$ -Raumfigur hinweisen müssen.

Die Änderung in der Zusammensetzung der obengenannten Dampfelinie mit der Temperatur lässt sich auf folgende Weise ableiten.

Betrachten wir die Sublimationslinie der zwei Komponenten in einer  $P, T$ -Darstellung, dann bezieht sich die obere Linie auf die meist flüchtige Komponente A und die Untere auf die weniger flüchtige Komponente B. Für diese Linien gilt die Beziehung

$$T \frac{dp}{dT} = \frac{Q_{SG}}{v_g - v_s} \quad \dots \quad (1)$$

Verhält der Dampf sich wie ein ideales Gas, so können wir schreiben:

$$\frac{d \ln p}{dT} = \frac{Q_{SG}}{RT^2}.$$

<sup>1</sup>) Amsterdam 1909.

Nehmen wir nun an, dass die Sublimationswärme in dem von uns betrachteten Temperaturgebiet keine merkliche Temperaturfunktion ist, so bekommen wir für die Komponente  $A$  bei den zwei Temperaturen  $T_1$  und  $T_2$ , wobei  $T_2 > T_1$

$$\ln p_{A_{T_1}} = -\frac{Q_{SG_A}}{RT_1} + C \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (2)$$

$$\ln p_{A_{T_2}} = -\frac{Q_{SG_A}}{RT_2} + C \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (3)$$

Für die Komponente  $B$  bekommt man natürlich analoge Beziehungen, und aus diesen vier Beziehungen erhält man dann die Gleichung

$$\ln \frac{p_{B_{T_2}}}{p_{A_{T_1}}} = (Q_{SG_B} - Q_{SG_A}) \frac{T_2 - T_1}{T_1 T_2} \cdot \frac{1}{R} \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (4)$$

Um ein Urteil über die Größen  $Q_{SG_A}$  und  $Q_{SG_B}$  zu gewinnen, haben

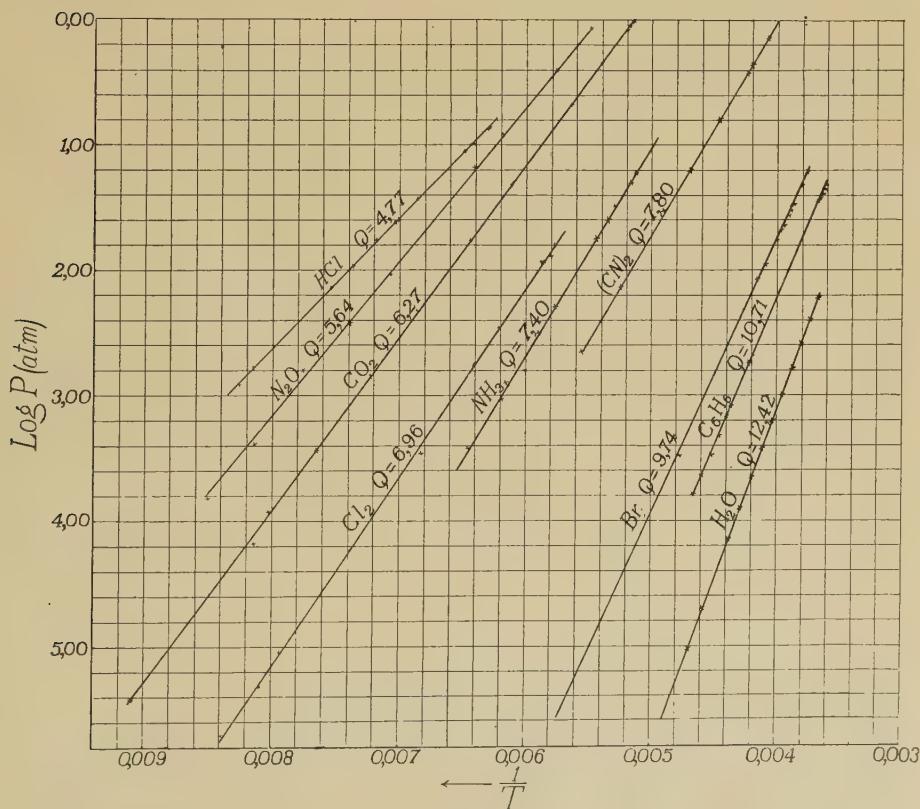


Fig. 1

wir von den in der Literatur<sup>1)</sup> gegebenen Dampfdrucken verschiedener festen Stoffen eine Anzahl Angaben benutzt um bei Darstellung von  $\log p$  als Funktion von  $\frac{1}{T}$  den Wert der Sublimationswärme kennen zu lernen.

Wie Fig. 1 zeigt, sind die so erhaltenen Linien für die Stoffe Wasser, Benzol, Brom, Chlor, Cyan, Ammoniak, Kohlendioxyd, Stickstoffoxydul, Salzsäure<sup>2)</sup> über die angegebenen Temperaturtrajekte gerade Linien, so dass die molekulare Sublimationswärme sofort aus der Tangente des Neigungswinkels folgt.

Die so erhaltenen Werte in K. Cal. sind den Linien in Fig. 1 beigeschrieben und diese Zahlen findet man auch bei den Kurven in Fig. 2, wo der Dampfdruck als Funktion der Temperatur dargestellt ist.

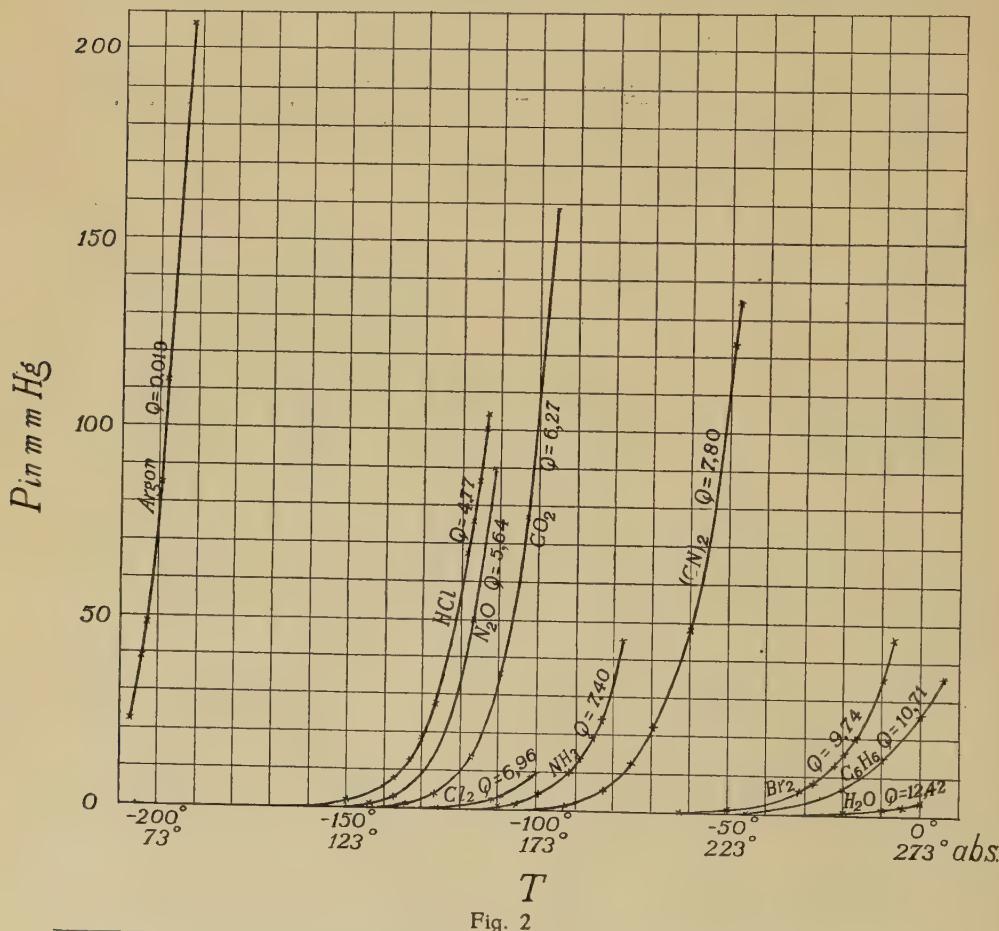


Fig. 2

<sup>1)</sup> Am Schluss dieser Abhandlung ist die benutzte Literatur angegeben.

<sup>2)</sup> Die Linie von Argon ist, um die Figur nicht zu gross zu machen, fortgelassen. Bemerkenswert ist es, dass die verschiedenen Linien in Fig. 1 nach einem Punkt zu konvergieren scheinen. Dieses ist nur eine Äusserung der wohlbekannten empirischen Tatsache, dass C aus der Gleichung (2), die Entropie-änderung beim Verdampfen, mit grober Annäherung von der Substanz unabhängig ist [Uhlich, Seite 220, Gleichung (4)].

Die Figuren 1 und 2 zeigen, dass die molekulare Sublimationswärme welche für Argon, welches hier die flüchtigste Substanz ist und 0.019 K. Cal beträgt, bei Abnahme der Flüchtigkeit der Stoffen regelmässig ansteigt bis zu dem Stoff Wasser, das hier die wenigst flüchtige Substanz ist und dann den Wert 12.42 K. Cal erreicht hat.

Ohne Ausnahme findet man also, dass die molekulare Sublimationswärme steigt bei Abnahme der Flüchtigkeit.

Die zweite Komponente  $B$  ist bei unseren phasentheoretischen Betrachtungen binärer Systeme immer die wenigst flüchtige Komponente und diese besitzt also, solange wenigstens die Dampfdrucke relativ klein sind, die grösste molekulare Sublimationswärme.

In der Gleichung (4) ist deshalb  $Q_{SG_B} > Q_{SG_A}$  woraus folgt, dass

$$\frac{p_{B_{T_2}}}{p_{B_{T_1}}} > \frac{p_{A_{T_2}}}{p_{A_{T_1}}} \quad \dots \quad (5)$$

Wenn nun die koexistierende Gasphase bei der Temperatur  $T_1$ ,  $1 - x_1$  Gr. mol.  $A$  enthält und bei der Temperatur  $T_2$ ,  $1 - x_2$  Gr. mol.  $A$ , so folgt aus (5)

$$\frac{1 - x_1}{x_1} > \frac{1 - x_2}{x_2} \quad \dots \quad (6)$$

Wenn man jetzt die Projektion der Dreiphasenstreifen auf die  $T, X$ -Ebene in Fig. 3 betrachtet, so bedeutet das Resultat, welches in Gleichung (6) zum Ausdruck kommt, dass die Dampflinie  $GG_1$ , bei der Quadrupelpunkts-temperatur anfangend, nach niedrigen Temperaturen der Achse der meist flüchtigen Komponente nähert, wie WUTE behauptete.

Es ist nicht ohne Interesse noch darauf hinzuweisen, dass die Voraussetzung, dass die koexistierende Gasphase sich wie eine ideale Gasmischung verhält zur Beantwortung unserer Frage notwendig war. Geht man nämlich den Weg, welcher von VAN DER WAALS Sr angegeben ist und von dem ersten von uns auch früher immer gegangen wurde<sup>1)</sup>, so kann man durch Anwendung der allgemeinen Koexistenzgleichung zwischen zwei Phasen eines binären Systems leicht eine allgemein gültige Gleichung für die Änderung von der Zusammensetzung der Dampfphase von der Dreiphasenstreifen für  $S_A + G + S_B$  mit der Temperatur ableiten. Diese Gleichung hat folgende Gestalt:

$$\left( \frac{dx}{dT} \right)_G = \frac{\eta_{S_A G} \cdot v_{S_B G} - \eta_{S_B G} \cdot v_{S_A G}}{\left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_G^2} \right)_{PT} [(x_{S_B} - x_G) v_{S_A G} - (x_{S_A} - x_G) v_{S_B G}]}$$

Hierbei lässt sich bemerken, dass die Grösse  $\left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_G^2} \right)_{PT}$  für stabile Phasen immer positiv ist.

1) Z. f. phys. Chem. 78, 708 (1912).

Weiter sieht man, dass weil die koexistierende Gasphase zwischen den zwei festen Phasen liegt,  $x_{S_B} - x_G$  positiv und  $x_{S_A} - x_G$  negativ ist.

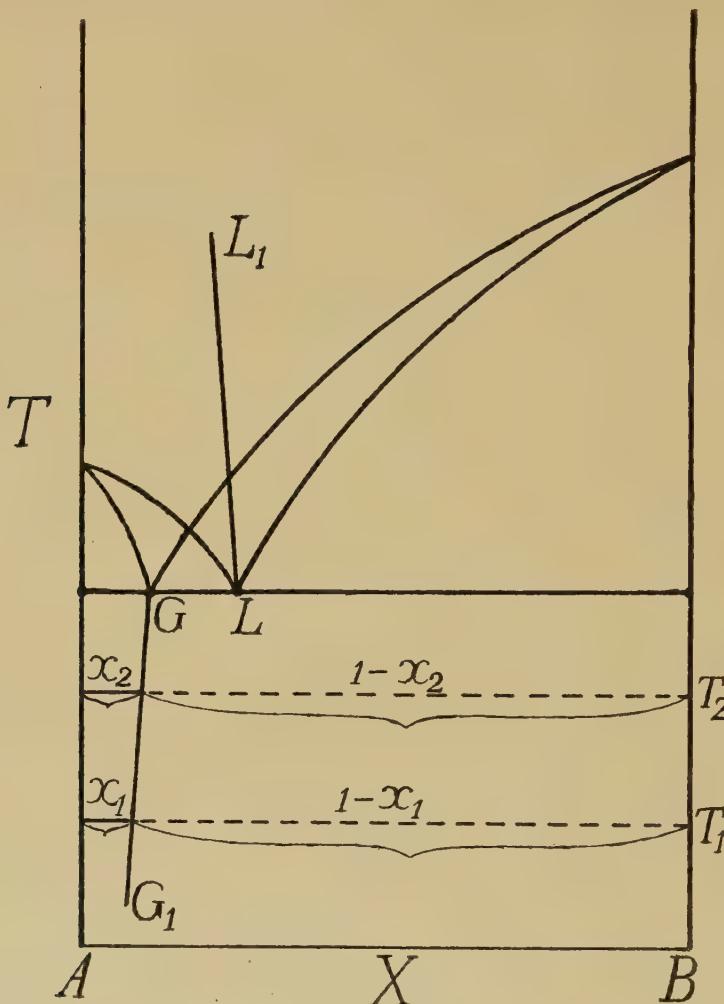


Fig. 3

Die Grössen  $v_{S_A G}$  und  $v_{S_B G}$  sind negativ, ebenso wie die Entropiewerte  $\eta_{S_A G}$  und  $\eta_{S_B G}$ , so dass der Nenner des Bruches sicherlich negativ ist. Eine Schwierigkeit aber bietet uns der Zähler, denn auch wenn wir wissen, dass die Sublimationswärme von *reinem B* grösser ist als die von *reinem A*, so lässt sich noch nichts mit Sicherheit bezüglich der relativen Grösse der differentiellen Entropiewerten  $\eta_{S_B G}$  und  $\eta_{S_A G}$  sagen, und erst wenn man die Annahme einführt, dass die Gasphase eine ideale Gasmischung ist und Additivität der Eigenschaften herrscht, dann kommt man zu dem Schluss dass  $\left(\frac{dx}{dT}\right)_G$  positiv ist, doch dann tut man schliesslich nichts anderes als wir bei unseren sehr einfachen Betrachtungen schon getan haben.

*Zusammenfassung.*

Es wurde gefunden dass in dem Gebiete wo die Dämpfe sich wie ideale Gase verhalten, die molekulare Sublimationswärme der wenigst flüchtigen Substanz am grössten ist. Eine Folge hiervon ist, dass, wie Wuite schon behauptete, die Zusammensetzung des mit den festen Komponenten eines binären Systems koexistierenden Dampfes sich bei Temperaturerniedrigung nach der Seite der flüchtigsten Komponente verschiebt.

## LITERATUR.

H<sub>2</sub>O HOLBORN, SCHEEL, HENNING. Wärmetabelle Braunschweig 1919.  
 C<sub>6</sub>H<sub>6</sub> C. F. MÜNDEL. Z. f. phys. Chem. **85**, 450 (1913).  
 FERSCHE. Ann. **44**, 265 (1891).  
 Br. HENGLEIN v. ROSENBERG und MUCHLINSKY. Z. f. Phys. **11**, 1 (1922).  
 C. und M. CUTHERBERTSON. Proc. Roy. Soc. **85**, 306 (1911).  
 ISNARDI. Ann. d. Phys. **61**, 264 (1920).  
 RAMSAY und YOUNG. Journ. Chem. Soc. **49**, 453 (1886).  
 C1 HENGLEIN, V. ROSENBERG und MUCHLINSKY. Z. f. Phys. **11**, 1 (1922).  
 HARTECK. Z. f. phys. Chem. **134**, 21 (1928).  
 CO<sub>2</sub> KAMERLINGH ONNES und S. WEBER. Versl. Kon. Akad. A'dam **24**, 370 (1915).  
 NERNST. Phys. Z. **9**, 435 (1908).  
 H. v. SIEMENS. Ann. d. Phys. **42**, 871 (1913).  
 HENNING und STOCK. Z. f. Phys. **4**, 226 (1921).  
 HENNING. Ann. d. Phys. **43**, 287 (1914).  
 KUENEN und ROBSON. Phil. Mag. **3**, 149 (1902).  
 ZENELEY und SMITH. Phys. Z. **7**, 667 (1906).  
 NH<sub>3</sub> MÜNDEL. Z. f. phys. Chem. **85**, 4 (1913).  
 HENNING und STOCK. Z. f. Phys. **4**, 226 (1921).  
 CRAGOE, MEYERS und TAYLOR. J. Amer. Chem. Soc. **42**, 206 (1920).  
 KARWAT. Z. f. phys. Chem. **112**, 486 (1924).  
 BERGSTROM. J. phys. Chem. **26**, 358 (1922).  
 CN<sub>2</sub> PERRY und BARDWELL. J. Amer. Soc. **47**, 2629 (1925).  
 N<sub>2</sub>O BURRELL und ROBERTSON. J. Amer. Chem. Soc. **37**, 2482 (1915).  
 BLACK, PRAAGH und TOPLEY. Trans. Farad. Soc. **26**, 196 (1930).  
 HCl EUCKEN und DONATH. Z. f. phys. Chem. **124**, 190 (1926).  
 HENNING und STOCK. Z. f. Phys. **4**, 226 (1921).  
 HENGLEIN. Z. f. Phys. **18**, 64 (1923).  
 KARWAT. Z. f. Phys. Chem. **112**, 486 (1924).

*Laboratorium für allgemeine und anorganische  
 Chemie der Universität.*

Amsterdam, Mei 1932.

**Histology. — Bloodgroup-investigation in the Over Veluwe (Harderwijk and surrounding districts).** By C. P. J. PENNING, M. A. v. HERWERDEN and TH. J. BOELE-NIJLAND. (Communicated by Prof. J. BOEKE).

(Communicated at the meeting of April 30, 1932.)

In the Proceedings Vol. 33 n°. 6 1930 the first results of the bloodgroup-investigation in Holland started by the Anthropological Commission of the Royal Academy of Sciences have been published. In that paper the technique has been described in details. For this reason it will suffice to repeat here that all the agglutination tests have been centralized in Utrecht and were performed in duplicate by one or two trained investigators. The results of the agglutination proofs were noted independently from the other anthropological data. The data were copied in individual cards for each person investigated.

The former paper relates to 3085 students. This time we are able to give the results of an investigation in a rural district situated in the North of the province of Gelderland near the Zuiderzee. This part of the province is called the "Over Veluwe".

The first author, physician in the district, collected the material and performed the anthropological measurements. Both the other authors are responsible for the agglutination tests. The complete work recently appeared in the Dutch language as a doctor's thesis at the University of Utrecht<sup>1)</sup> and contains also historical and ethnographical data. As to the history and the prehistoric period of the population we have to refer to the above-named publication. The population is of mixed type with Frisian, Franconian and Saxon (East Baltic) elements.

The distribution as to bloodgroups of 1074 persons (540 ♂ and 534 ♀)

<sup>1)</sup> In order to test the BERNSTEIN theory in every marriage AB  $\times$  O the bloodgroup of the children has been investigated. In 3 marriages the results were as follows:

O	A	B	AB.
0	4	7	0

In 3 marriages AB  $\times$  A:

O	A	B	AB.
0	5	4	0

in one marriage AB  $\times$  B:

O	A	B	AB.
0	2	0	1

In none of these marriages a child of group O has been found.

belonging to families *living in the district during three generations or longer*, is as follows:

I.

Number:	O	A	B	AB
1074	501	441	91	41
(540 + 534)	(261 + 240)	(210 + 231)	(47 + 44)	(22 + 19)
♂ ♀	46.6 %	41.1 %	8.5 %	3.8 %

As this material of 1074 persons sometimes contained brothers and sisters in the same family, all these have been eliminated but one (generally the first one investigated). In that way there remain 873 persons (439 ♂ and 434 ♀). The distribution as to bloodgroups of this number is as follows:

II.

Number:	O	A	B	AB
873	413	358	67	35
(439 + 434)	(214 + 199)	(172 + 186)	(34 + 33)	(19 + 16)
♂ ♀	47.3 %	41.0 %	7.8 %	4.0 %
	± 1.68	± 1.66	± 0.9	± 0.66

As in this rural district very often several persons bearing the same family name occur in this material, it has been considered worth while to investigate a group selected from the total number by taking only one person bearing each family name. Taking these 263 persons we get the following results:

III.

Number:	O	A	B	AB
263	120	112	20	11
(107 + 156)	(58 + 62)	(39 + 73)	(8 + 12)	(2 + 9)
♂ ♀	45.6 %	42.6 %	7.6 %	4.2 %

Taking the remaining persons we get:

IV.

Number:	O	A	B	AB
610	293	246	47	24
(332 + 278)	(156 + 137)	(133 + 113)	(26 + 21)	(17 + 7)
♂ ♀	48 %	40.3 %	7.7 %	3.9 %

If we take into account the probable error, there would seem to be no reason to eliminate brothers and sisters in this material as has been done under II. Wishing, however, to avoid every possibility of selection in this investigation we accept for the district the results as stated in II:

Number	O	A	B	AB
873	47.3% $\pm$ 1.68	41% $\pm$ 1.66	7.8% $\pm$ 0.9	4% $\pm$ 0.66

The blood-index after HIRSZFELD is  $\frac{A + AB}{B + AB} = 3.81$ .

Computed after BERNSTEIN:

$$r = 68.8 \quad p = 25.8 \quad q = 5 \quad p + q + r = 99.6.$$

For the students we got:

$$r = 67.6 \quad p = 25.6 \quad q = 6.8 \quad p + q + r = 100.0.$$

If only the farmers and fishermen's population had been investigated, the percentage of group B would have been lower, group A higher than is actually the case, as this material also contains 484 persons, who are neither agriculturers nor fishermen. Taking these 484 persons, one finds:

O	A	B	AB
241	181	43	19
49.8% $\pm$ 2.27	37.4% $\pm$ 2.2	8.9% $\pm$ 1.29	3.9% $\pm$ 0.88

Taking 389 farmers and fishermen together we find:

O	A	B	AB
172	177	24	16
44.2% $\pm$ 2.51	45.5% $\pm$ 2.52	6.2% $\pm$ 1.22	4.1% $\pm$ 1.04

It must not be forgotten, that this district has had some emigrants from the south in former centuries (paper manufacturers), who will have had more chance to mix with that part of the local population that does not exist of fishermen.

Considering this investigation we have to bear in mind, that it does not give an example of the relations amongst a set of people completely isolated since ancient times such as we sometimes find in our small rural places. Such cases will be described in future publications.

It is exceptional to find a local physician ready to devote his time and interest to an investigation like this. It is a great advantage in this research that the first author has been so well acquainted with the local population that he was able to choose his material and eliminate the emigrants which have come into the district during the last three generations.

For comparison the column relating to the four bloodgroups of the 3085 students and that relating to the present investigation have been placed side by side (fig. 1).

In order to test if in this material there exists any correlation between

the bloodgroup and other anthropological traits the distributions of the bloodgroup have been compared with the distribution of the eye colour, the hair colour, the cephalic index respectively.

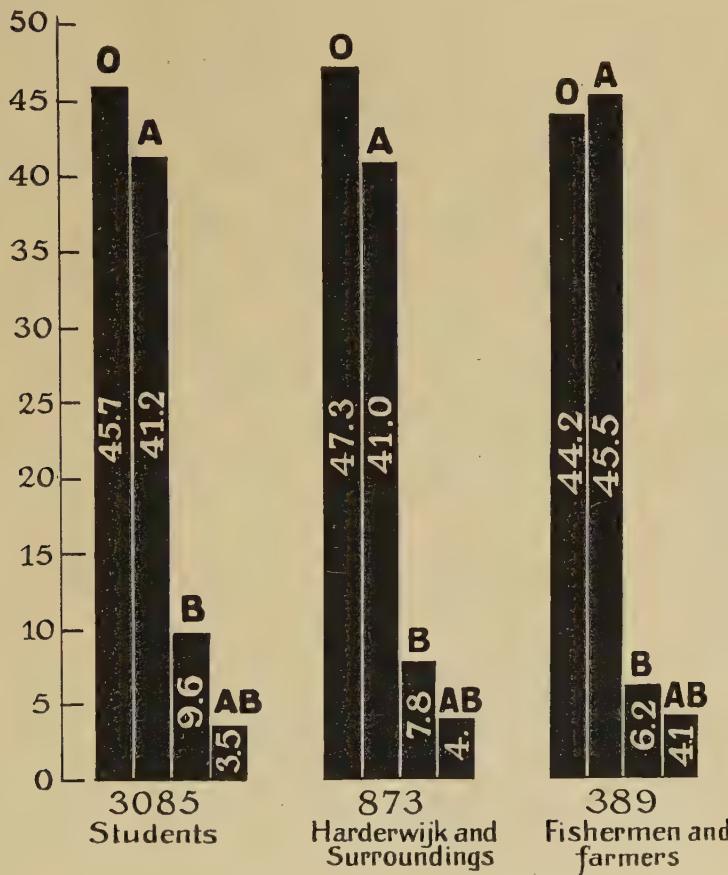


Fig. 1

#### *The Eye Colour.*

Amongst 843 persons 554 or  $65.72\% \pm 1.64$  had light coloured eyes, 289 or  $34.28\% \pm 1.64$  had dark coloured eyes.

Table I gives the distribution of different eye colour over the 4 blood-groups :

It is sufficiently clear from the table that no correlation between blood-group and eye colour can be noted in this material.

#### *The Hair Colour.*

Amongst 818 persons tested 385 or  $47.07\% \pm 1.75$  were fair, 433 or  $32.93\% \pm 1.75$  were darkblond (26 redhaired persons have been left outside the consideration, the number being too small; 13 belonged to

TABLE 1. Bloodgroup and Eye Colour.

Blood-group	Number	Blue	Bluegrey and grey	Greybrown, blue + brown, bluegrey + brown	Brown
O	397 47.09 % ± 1.72	180 = 45.34 % ± 2.5 47.49 % ± 2.57	82 = 20.65 % ± 2.03 46.86 % ± 3.77	124 = 31.23 % ± 2.33 47.88 % ± 3.10	11 = 2.77 % ± 0.82 36.67 % ± 8.80
A	349 41.40 % ± 1.70	153 = 43.84 % ± 2.66 40.37 % ± 2.52	77 = 22.06 % ± 2.22 44 % ± 3.75	106 = 30.37 % ± 2.46 40.93 % ± 3.06	13 = 3.72 % ± 1.01 43.33 % ± 8.84
B	65 7.71 % ± 0.92	33 = 50.77 % ± 6.2 8.71 % ± 1.45	9 = 13.85 % ± 4.14 5.14 % ± 1.67	19 = 29.23 % ± 5.64 7.34 % ± 1.62	4 = 6.15 % ± 2.98 13.33 % ± 6.21
AB	32 3.80 % ± 0.66	13 = 40.63 % ± 8.68 3.43 % ± 0.93	7 = 21.88 % ± 7.31 4 % ± 1.48	10 = 31.25 % ± 8.19 3.86 % ± 1.22	2 = 6.25 % ± 4.27 6.67 % ± 4.56
Totals	843	379 = 44.96 % ± 1.71	175 = 20.76 % ± 1.40	259 = 30.72 % ± 1.59	30 = 3.56 % ± 0.64

group O, 8 to A, 2 to B, 3 to AB). Table 2 gives the distribution of different hair colour over the 4 bloodgroups.

TABLE 2. Bloodgroup and Hair Colour.

Blood-group	Number	Fair hair	D. bl. hair
O	384 46.94 % ± 1.74	190 = 49.48 % ± 2.55 49.35 % ± 2.55	194 = 50.52 % ± 2.55 44.80 % ± 2.39
A	343 41.93 % ± 1.73	161 = 46.94 % ± 2.7 41.82 % ± 2.04	182 = 53.06 % ± 2.7 42.03 % ± 2.37
B	62 7.58 % ± 0.93	23 = 37.10 % ± 6.14 5.97 % ± 1.21	39 = 62.90 % ± 6.14 9.01 % ± 1.38
AB	29 3.55 % ± 0.65	11 = 37.93 % ± 9.01 2.86 % ± 0.85	18 = 62.07 % ± 9.01 4.16 % ± 0.96
Totals	818	385 = 47.07 % ± 1.75	433 = 52.93 % ± 1.75

The correlation O → B and fair hair → darkblond hair = + 0.086  
± 3 × 0.047.

The correlation  $A \rightarrow B$  and fair hair  $\rightarrow$  darkblond hair  $= + 0.071 \pm 3 \times 0.050$ .

These correlations lay within the limit of 3 times the probable error.

In the next table persons with fair hair, light coloured eyes are compared with those having darkblond hair and dark coloured eyes. Amongst 818 persons tested  $301 = 36.8\% \pm 1.69$  had the firstnamed,  $199 = 24.33\% \pm 1.55$  the lastnamed combination. The remaining part had the combination fair hair, dark eyes or darkblond hair, light coloured eyes, resp.

TABLE 3. Bloodgroup and eye colour + hair colour

Blood group	Number	Fair hair light eyes	Fair hair dark eyes	Dark bl. hair light eyes	Dark bl. hair dark eyes
O	384 46.94% $\pm 1.74$	$150 = 39.06\% \pm 2.49$ 49.8 % $\pm 2.88$	$40 = 10.42\% \pm 1.56$ 47.6 % $\pm 5.45$	$103 = 26.82\% \pm 2.26$ 44.0 % $\pm 3.25$	$91 = 23.7\% \pm 2.17$ 45.7 % $\pm 3.53$
A	343 41.93% $\pm 1.73$	$126 = 36.73\% \pm 2.60$ 41.9 % $\pm 2.84$	$35 = 10.2\% \pm 1.63$ 41.7 % $\pm 5.38$	$99 = 28.86\% \pm 2.45$ 42.3 % $\pm 3.23$	$83 = 24.20\% \pm 2.31$ 41.7 % $\pm 3.49$
B	62 7.58% $\pm 0.93$	$17 = 27.42\% \pm 5.67$ 5.6 % $\pm 1.32$	$6 = 9.68\% \pm 3.76$ 7.1 % $\pm 2.80$	$22 = 35.48\% \pm 6.08$ 9.4 % $\pm 1.91$	$17 = 27.42\% \pm 5.67$ 8.5 % $\pm 2.0$
AB	29 3.55% $\pm 0.65$	$8 = 27.59\% \pm 8.30$ 2.7 % $\pm 0.92$	$3 = 10.34\% \pm 5.65$ 3.6 % $\pm 2.03$	$10 = 34.48\% \pm 8.83$ 4.3 % $\pm 1.33$	$8 = 27.59\% \pm 8.3$ 4 % $\pm 1.39$
Totals	818	$301 = 36.80\% \pm 1.67$	$84 = 10.27\% \pm 1.06$	$234 = 28.60\% \pm 1.58$	$199 = 24.33\% \pm 1.50$

The correlation bloodgroup  $A \rightarrow B$  and fair hair, light coloured eyes  $\rightarrow$  darkblond hair, dark eyes  $= + 0.073 \pm 3 \times 0.063$ . This correlation lays within the limit of 3 times the probable error. Therefore it can be stated that there exists no indication in this population of a positive correlation between group B and a higher pigmentation as expressed by the colour of hair and eye together.

In table 4 a division has been made between the fair haired light eyed people and those who have either fair or dark hair and dark eyes. In that way no correlation can be traced either.

$O \rightarrow B$  and fair hair light eyes  $\rightarrow$  fair hair or dark hair, dark eyes  $= + 0.083 \pm 3 \times 0.043$ .

$A \rightarrow B$  and fair hair light eyes  $\rightarrow$  fair hair or dark hair, dark eyes  $= + 0.07 \pm 3 \times 0.049$ .

TABLE 4.

Blood-group	Number	Fair hair, light eyes	Fair and D. bl. hair, dark eyes
O	384 46.94 % $\pm 1.74$	150 = 39.06 % $\pm 2.49$ 49.8 % $\pm 2.81$	234 = 60.94 % $\pm 2.49$ 45.3 % $\pm 2.2$
A	343 41.93 % $\pm 1.73$	126 = 36.73 % $\pm 2.6$ 41.9 % $\pm 2.84$	217 = 63.27 % $\pm 2.6$ 42 % $\pm 2.19$
B	62 7.58 % $\pm 0.93$	17 = 27.42 % $\pm 5.67$ 5.6 % $\pm 1.31$	45 = 72.58 % $\pm 5.67$ 8.7 % $\pm 1.23$
AB	29 3.55 % $\pm 0.65$	8 = 27.59 % $\pm 8.3$ 2.7 % $\pm 0.92$	21 = 72.41 % $\pm 8.3$ 4.1 % $\pm 0.87$
Totals	818	301 = 36.80 % $\pm 1.69$	517 = 63.20 % $\pm 1.69$

*The Cephalic Index.*

Amongst 510 persons measured 42 = 8.2 %  $\pm 1.2$  were dolichocephalic, 53.7 %  $\pm 2.19$  mesocephalic and 194 = 38 %  $\pm 2.15$  brachycephalic. The next table gives the distribution over the 4 bloodgroups.

TABLE 5. Bloodgroup and head Index.

Blood-group	Number	Ceph. Index	Dolichocephalic	Mesocephalic	Brachycephalic
O	219 42.9 % $\pm 2.20$	80.19	24 (11 %) $\pm 2.12$	111 (50.7 %) $\pm 3.38$	84 (38.4 %) $\pm 3.29$
A	231 45.3 % $\pm 2.20$	80.11	15 (6.5 %) $\pm 1.62$	136 (58.9 %) $\pm 3.24$	80 (34.6 %) $\pm 3.13$
B	41 8 % $\pm 1.20$	81.11	2 (4.9 %) $\pm 3.37$	17 (41.5 %) $\pm 7.69$	22 (53.7 %) $\pm 7.79$
AB	19 3.7 % $\pm 0.84$	80.45	1 (5.26 %) $\pm 5.12$	10 (52.63 %) $\pm 11.45$	8 (42.11 %) $\pm 11.33$
Totals	510	80.26	42 (8.2 %) $\pm 1.23$	274 (53.7 %) $\pm 2.21$	194 (38.0 %) $\pm 2.15$

Starting from the headform the figures are:



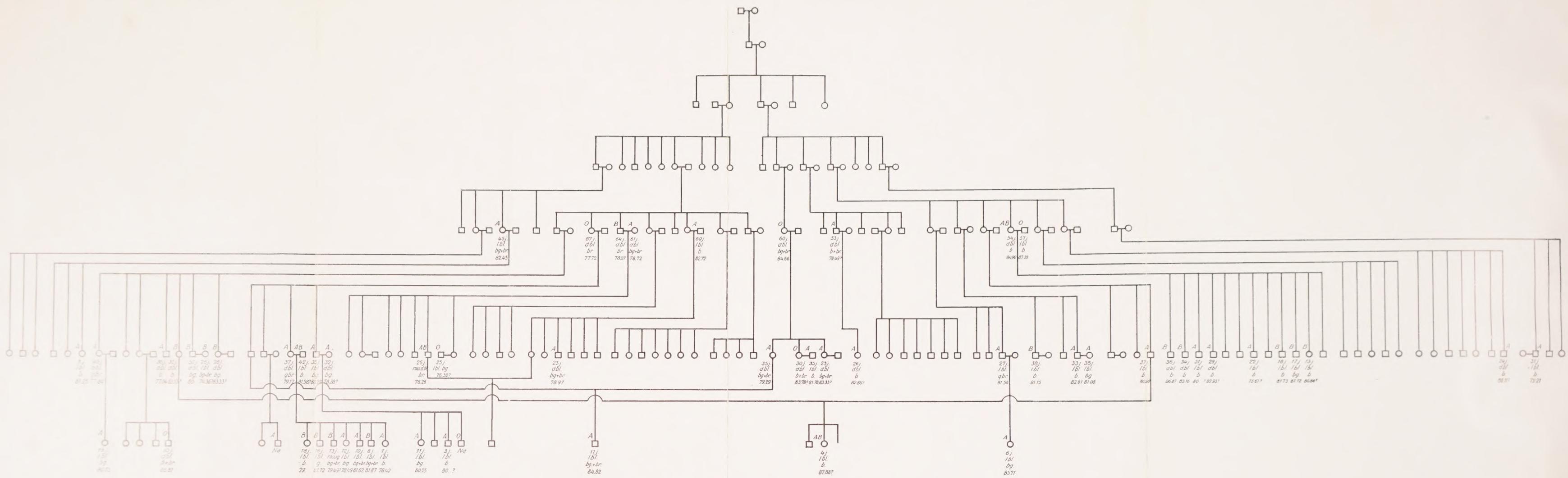


Fig. 2

Head-form	Number	O	A	B	AB
Dolichoc.	42	24 (57.1 %) $\pm$ 7.64	15 (35.7 %) $\pm$ 7.39	2 (4.8 %) $\pm$ 3.4	1 (2.4 %) $\pm$ 2.36
Mesoc.	274	111 (40.5 ..) $\pm$ 2.97	136 (49.6 ..) $\pm$ 3.02	17 (6.2 ..) $\pm$ 1.46	10 (3.6 ..) $\pm$ 1.13
Brachyc.	194	84 (43.3 ..) $\pm$ 3.56	80 (41.2 ..) $\pm$ 3.54	22 (11.3 ..) $\pm$ 2.27	8 (4.1 ..) $\pm$ 1.42
Totals	510	219 (42.9 %) $\pm$ 2.19	231 (45.3 %) $\pm$ 2.20	41 (8 %) $\pm$ 1.20	19 (3.7 %) $\pm$ 0.84

The correlation  $A \rightarrow B$  and dolichocephalic  $\rightarrow$  brachycephalic  $= + 0.085 \pm 3 \times 0.091$ . Therefore it can be stated that in this material there exists no correlation at all between the bloodgroup and the cephalic index.

The combination darkblond hair, brown (greybrown) eyes and brachycephaly has been noted 36 times. The combination fair hair, blue (greyblue, grey) eyes and dolichocephaly has been noted 13 times.

In the course of the investigation it proved useful for a special reason to test the bloodgroup of different members of one family. A pedigree chart (fig. 2) has e.g. been made, ascending to a stranger, a Frenchman or a Walloon, who founded a paper mill near Harderwijk. Several descendants of this stranger living in Hierden or in the neighbourhood of that place, have been used for a genealogical investigation. The bloodgroups of 48 members of this family have been determined:

Number	O	A	B	AB
48	4	27	14	3

The pedigree chart added here gives an idea of the descendants of one strange element in a settled population. Some members are living in other communities and some of them have emigrated to N. America; only in a relative small number the anthropological traits could be tested. The factor B can be traced back to the third ascending generation. It is possible but not certain that it has been imported by the immigrant himself<sup>1)</sup>.

#### Conclusion.

This investigation of a settled population in a provincial district leads to the same results as the larger material, taken from students, concerning the lack of correlation between the bloodgroup and other anthropological traits. This question will again be tested when the entire bloodgroup investigation will be ready for publication.

<sup>1)</sup> This pedigree chart has been taken from the doctor thesis of the first author. Explanation of terms used in Dutch language: j = years of age, l.bl. = fair, Na = blood from umbilical chord. Rossig = red blond.

The bloodgroup distribution in this provincial district must be considered as a local one. It will be seen in further publications that our entire material collected in the last six years points to the existance of considerable local variations as to the bloodgroup distribution in our rural districts. Inter-marriage during centuries has created local populations, genetically different as a whole from neighbouring populations. This is often reflected in the distribution of the bloodgroups, as we will show later.

#### ERRATUM.

In the pedigree Chart the person n<sup>o</sup>. 84 in the 6th generation is 29 years old. The parentheses n<sup>o</sup>. 15 and n<sup>o</sup>. 32 in the 6th generation ought to be omitted.

---